Práctica 10: Estadística

"All models are wrong, but some are useful."
George P. Box

Ejercicio 1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma)$. Obtener los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de

a) μ con $\sigma^2 = \sigma_0^2$ conocida

b) σ con $\mu = \mu_0$ conocida

c) μ y σ^2

Ejercicio 2. Consideremos muestras aleatorias $X_1, \dots, X_n$ para cada una de las siguientes distribuciones:

i) exponencial de parámetro θ

ii) Poisson de parámetro θ

iii) con densidad

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} x^{(\frac{1}{\theta}-1)} I_{[0,1]}(x), \quad \theta > 0.$$

a) Encontrar en cada caso el estimador de máxima verosimilitud y el de momentos de θ.

b) En los dos primeros casos y para el estimador de máxima verosimilitud del tercero, decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados.

c) Decir si los estimadores obtenidos son consistentes.

Ejercicio 3. Se define el error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ como

$$ECM(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

a) Verificar que $\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \left(\mathrm{sesgo}(\hat{\theta})\right)^2$ donde $\mathrm{sesgo}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$.

b) ¿Cuánto vale $\mathrm{ECM}(\hat{\theta})$ si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ?

Ejercicio 4. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta, \infty)}(x).$$

a) Probar que $T = \min_{1 \le i \le n} X_i$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ.

b) Calcular el estimador de θ basado en el primer momento.

c) Decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados, y consistentes.

d) Se realiza un estudio en el que se recogen $n = 50$ valores de x_i, obteniéndose que $\sum_{i=1}^{50} x_i = 146,28$. Dar una estimación puntual de θ basada en el estimación de momentos para esta muestra.

e) Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para θ.

SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\min_{1\leq i\leq n} (X_i) - \theta$.

Ejercicio 5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal.

a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para la media cuando la varianza es conocida.

b) Se realiza a 10 pacientes un análisis de sangre y se determina el porcentaje de hemoglobina, obteniéndose $\bar{X} = 12$.

   i) Hallar un intervalo de confianza para la media verdadera de nivel exacto 0.90, suponiendo que la concentración de hemoglobina se distribuye normalmente y que $\sigma = 0.6$.

   ii) Si se quisiera que la longitud del intervalo hallado en i) fuera a lo sumo 0.5, ¿a cuántos pacientes debería analizarse?

Ejercicio 6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para λ.

Ejercicio 7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con densidad:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

a) Hallar $\hat{\theta}_n$ el EMV de θ.

b) Probar que la función de distribución acumulada de $T = \frac{\hat{\theta}_n}{\theta}$ es $F_T(t) = \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(t)(1 - \frac{1}{t^n})$.

c) Hallar un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para θ.

d) Hallar la esperanza de la longitud del intervalo hallado en c).

e) Calcular un intervalo de confianza de nivel 0.90 basado en la siguiente muestra:

$$8 \;\; 10 \;\; 7,5 \;\; 6 \;\; 9,5 \;\; 11 \;\; 7 \;\; 9 \;\; 10 \;\; 6.$$

Ejercicio 8. Se seleccionan muestras aleatorias independientes de dos poblaciones distintas y para la media de cada una de las poblaciones se construye un intervalo de confianza de nivel 0.90 (90%).

a) Calcular la probabilidad de que ninguno de los intervalos contenga al verdadero valor de la media que estima.

b) Calcular la probabilidad de que al menos uno de los intervalos no contenga al verdadero valor de la media que estima.

c) Generalizar a) y b) al caso de k poblaciones, siendo $k \geq 2$.

Ejercicio 9. Dados $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, una variable aleatoria X tiene distribución *Laplace*(μ, b) si su función de densidad viene dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}.$$

a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud, $\hat{b}$, para b conociendo μ.

b) Calcular el sesgo y la varianza de $\hat{b}$. ¿Es consistente?

c) A partir de la distribuición de $T = \frac{2}{b} \sum_{i=1}^{n} |X_i|$, hallar un intervalo de confianza para b de nivel exacto 0.95 para una muestra aleatoria con distribución *Laplace*$(0, b)$ y $n = 10$. Sugerencia: Usar que $\chi^2_{2n} = \Gamma(n, 1/2)$ y utilizar una tabla de χ^2.