

CLASE 24/4: VECTORES ALEATORIOS

Ejercicio 1. Una urna contiene 2 bolillas negras y 2 blancas. Se tira un dado equilibrado con 4 caras que representan los números del 1 al 4. Se extraen tantas bolillas como indica el dado. Llamamos X = cantidad de bolillas negras extraídas, e Y = cantidad de bolillas blancas extraídas.

- (a) Hallar la función de probabilidad puntual conjunta p_{XY} .
- (b) Hallar las marginales p_X y p_Y .
- (c) Decidir si X e Y son independientes.
- (d) Calcular $\mathbb{P}(X < Y)$.

Ejercicio 2. Se tira una moneda equilibrada 3 veces. Llamamos X = cantidad de caras que salieron. Si $X = k$, se extraen sin reposición $k + 1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y 1 roja. Sea Y = cantidad de bolillas rojas extraídas.

- (a) Hallar la función de probabilidad puntual conjunta p_{XY} .
- (b) Hallar la marginal p_Y .
- (c) Si no se extrajo ninguna bolilla roja, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido 2 caras?

Ejercicio 3. (Ejercicio 8a - Práctica 5): Dadas $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F , se definen sus estadísticos de orden $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ como aquellas variables aleatorias que se obtienen ordenando las X_i de manera creciente. En particular, tenemos que

$$X^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$X^{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Hallar para cada $k = 1, \dots, n$ la función de distribución acumulada de $X^{(k)}$ en términos de F .

Ejercicio 4. Vos y Trueno participan como dupla en una batalla 2 vs 2 en la final del torneo nacional de freestyle. En la ronda decisiva, cada artista debe improvisar una rima fluida el mayor tiempo posible sin trabarse ni repetir palabras. El tiempo que Vos logra mantener la rima es una variable aleatoria $W \sim \mathcal{E}(1/5)$, mientras que el tiempo de Trueno está modelado como $T \sim \frac{W^2}{4}$, siendo W y T independientes.

El jurado asigna un puntaje a cada artista según el tiempo t sostenido de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 6 \\ 5 & \text{si } t > 6 \end{cases}.$$

El puntaje final de la dupla se define como el máximo entre los puntajes individuales.

- (a) Hallar la función de distribución acumulada de T y su densidad.
- (b) Hallar la función de distribución acumulada del puntaje asignado a la dupla.
- (c) Si X es el puntaje asignado a Vos y Z el puntaje asignado a la dupla, hallar la función de probabilidad conjunta del vector (X, Z) .