 CLASE 17/6: TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE + FUNCIONES CARACTERÍSTICAS

Ejercicio 1. Dado $\lambda > 0$, sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Definimos

$$Y_n = n^\alpha \frac{n - \lambda(\sum_{i=1}^n X_i)}{(\sum_{i=1}^n X_i)^3}.$$

- Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \lambda^6)$ si $\alpha = \frac{5}{2}$.
- Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ si $\alpha < \frac{5}{2}$.
- ¿Y si $\alpha > \frac{5}{2}$?

Ejercicio 2. Sea $0 < p < 1$. Hallar la función característica de $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Ejercicio 3. Sean $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos $X_n = b_n Y_n$. Probar que:

- Si $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = B^2 < \infty$, entonces $\sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, B^2)$.
- Si $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 = +\infty$, entonces no existe ninguna variable aleatoria W tal que $\sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{\mathcal{D}} W$.