Clase 10/6: Ley de los Grandes Números

Ejercicio 1. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{E}(X_1) = \mu_X$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma_X^2$, $\mathbb{E}(Y_1) = \mu_Y$, $\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma_Y^2$. Se define $(Z_n)_{n\geq 1}$ de la siguiente manera: se lanza una moneda honesta y se define $Z_1 := X_1$ si sale cara, y $Z_1 := Y_1$ si sale ceca. Se repite este procedimiento para $Z_2, Z_3, \ldots$. Supongamos que X_i es independiente de Y_j y de los lanzamientos de la moneda para todo i, j. Decidir si $(\bar{Z}_n)_{n\geq 1}$ converge casi seguro.

Ejercicio 2. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Hallar el límite casi seguro de

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1 - 1)^2 + \ldots + (X_n - 1)^2}.$$

Ejercicio 3. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de variables aleatorias independientes tales que X_k es independiente de Y_j para cualquier elección de k y j. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \sim \mathcal{U}[0,2]$ y $X_n \sim LN(-1,3)$, donde

$$W \sim LN(\mu, \sigma^2) \iff \ln(W) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Probar que $\left(\prod_{i=1}^n \frac{X_i}{Y_i}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{cs} \frac{1}{2}$.