Clase 5/6: Convergencias II

Ejercicio 1. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con densidad

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x),$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ está fijo y sea $X_n^{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Probar que $X_n^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{P}} X = \theta$ (constante).

Ejercicio 2. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con densidad

$$f(x) = \frac{2x}{\sigma^2} \mathbb{1}_{[0,\sigma]}(x),$$

para algún $\sigma > 0$ fijo y sea $X_n^{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Probar que existe una variable aleatoria X tal que $X_n^{(n)} \xrightarrow{c.s.} X$.

Ejercicio 3. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } x = n^2 - 1 \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \text{si } x = -1 \\ 0 & \text{si } x \notin \{-1, n^2 - 1\}. \end{cases}$$

Probar que $\bar{X}_n \xrightarrow{c.s.} -1$.

Ejercicio 4. Se redondean 50 números al entero más cercano y luego se los suma. Si el error de redondeo de cada número es una variable aleatoria $\mathcal{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y son todas independientes, acotar la probabilidad de que la suma resultante difiera de la suma exacta por 3 o más unidades.

Ejercicio 5. Una fábrica produce cajas de chocolate. Cada caja contiene un chocolate blanco y uno negro. El peso de un chocolate negro, uno blanco y una caja vacía son variables aleatorias independientes con esperanza 50, 40 y 10 (gramos), respectivamente y varianzas 0.15, 0.1 y 0.01, respectivamente.

a) Hallar una cota inferior para la probabilidad de que una caja pese entre 98.5 y 101.5 gramos.

b) Hallar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de 10 cajas pese entre 98.5 y 101.5 gramos.

c) Hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que la probabilidad del evento "el promedio de n cajas está entre 98.5 y 101.5 gramos" sea mayor a 0.9999.

Ejercicio 6. Sean $(X_n)_{n \geq 2}$ variables aleatorias independientes tales que $X_n \sim \mathcal{E}(1)$ para todo $n \geq 2$, y sea $Y_n := \frac{X_n}{\ln n}$.

a) Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.

b) Probar que para todo $n \geq 2$ y para todo $0 < \epsilon \leq 1$, $\mathbb{P}(\cup_{m=n}^{\infty} |Y_m| \geq \epsilon) = 1$.

c) Usando el ítem anterior deducir que $\mathbb{P}(Y_n \to 0) = 0$ y por lo tanto $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge casi seguro a 0.