Clase 3/6: Convergencias

Ejercicio 1. *(Teorema del mono infinito)* Sea A un conjunto finito no vacío. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias iid con $X_i \sim \mathcal{U}(A)$ y s una secuencia finita de elementos de A. Probar que s aparece infinitas veces en $(X_1, X_2, \ldots)$ con probabilidad 1.

Ejercicio 2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes tales que X_n tiene distribución $\mathcal{U}[0, a_n]$ donde $a_n > 0$. Muestre que:

a) Si $a_n = n^2$, entonces con probabilidad 1, solamente un número finito de las X_n toma valores menores que 1.

b) Si $a_n = n$, entonces con probabilidad 1, un número infinito de las X_n toma valores menores que 1.

Ejercicio 3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias iid con $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = \infty$. Probar que $|X_n| > \sqrt{n}$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ con probabilidad 1.

Ejercicio 4. Se tira una moneda equilibrada reiteradas veces. Definimos

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si sale cara} \\ 0 & \text{si sale ceca} \end{cases} \qquad\qquad X = \begin{cases} 0 & \text{si sale cara} \\ 1 & \text{si sale ceca} \end{cases}$$

¿Es cierto que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$? ¿Y que $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$?

Ejercicio 5. Sea $X \sim \mathcal{U}[0,1]$. Definimos $A_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $A_2 = [\frac{1}{2}, 1]$, $A_3 = [0, \frac{1}{3}]$, $A_4 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $A_5 = [\frac{2}{3}, 1]$, etc. Sea $Y_n = \mathbb{1}_{A_n}(X)$. Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. ¿Vale que $Y_n \xrightarrow{c.s.} X$?

Ejercicio 6. Sean $X_n \sim \mathcal{G}(\frac{\lambda}{n})$ y $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Probar que $\frac{1}{n} X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Ejercicio 7. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias iid con $X_1 \sim \mathcal{U}[0,1]$. Sea $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. ¿Es verdad que $Y_n \xrightarrow{c.s.} 0$?

Ejercicio 8. Sean $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. ¿Es cierto que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + Y$?

Ejercicio 9. Sean $X_1, X_2, \ldots, X$ tales que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$. ¿Es verdad que $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$?