
CLASE 13/5: VECTORES ALEATORIOS III + ESPERANZA

Ejercicio 1. Sea $\vec{X} = (X, Y)$ un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta dada por

$$f_{\vec{X}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x, 0 < y < e^{-x} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

a) Probar que $X \sim \mathcal{E}(1)$ y hallar f_Y , la función de densidad de Y .

b) Probar que $\frac{Y}{e^{-X}} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y es independiente de X .

Ejercicio 2. Nicolás le propone a Lucía el siguiente juego: se tiene una moneda pesada con probabilidad $\frac{1}{3}$ de salir cara, y un mazo de cartas compuesto por k cartas de cada número k entre 1 y 6. Ella debe lanzar la moneda y, en caso de que salga cara, tomar una carta al azar del mazo. El número que corresponda a dicha carta será su ganancia, y al mismo tiempo, la pérdida de Nico.

a) ¿Cuál es la ganancia esperada de Lucía?

b) Nicolás entiende que el juego así definido no es conveniente para él. Le propone a Lucía que en caso de que la moneda salga ceca, ella le pague a él “ p ”. Calcular la ganancia esperada para Lucía si $p = 3$. ¿Le conviene seguir jugando?

c) Hallar el p que haga que el juego esté equilibrado.

Ejercicio 3. En una hoja cuadriculada de $n \times n$ cuadraditos se pintan algunos de color rojo. Para cada cuadradito, la probabilidad de pintarlo de rojo es p (cada cuadradito es independiente de los demás). Sea X = cantidad de filas y columnas con al menos un cuadradito rojo. Hallar la esperanza de X .

Ejercicio 4. Miguel debe romper n platos. En cada ronda dispara a cada plato que queda sin romper y lo rompe con probabilidad p . Si X = cantidad de rondas que tarda, hallar la probabilidad puntual de X y su esperanza.