Práctica 8
Series de Fourier - Separación de variables

---

1. **a)** Verificar que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$ pero que (f_n) *no* converge a cero en media cuadrática.

b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en [0,1] pero que (f_n) *no* converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.

c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

2. Encontrar los valores A_1, A_2 y A_3 de modo que la función

$$y = A_1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}x)$$

sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b\cos x - c \operatorname{sen} x)^2 \, dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.

4. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrable y tal que se extiende a $\mathbb{R}$ con período 2π. Sean c_n $(n \in \mathbb{Z})$, a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ y b_n $(n \in \mathbb{N})$ los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.

c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.

5. **a)** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ para:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = x$

(iii) $f(x) = x^2$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) Usando **(iii)**, calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de $f(x)=x^2$, $x\in(-\pi,\pi)$, y extendiendo f por periodicidad a $\mathbb{R}$, probar que:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n^3}=\frac{1}{12}t(t^2-\pi^2)$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

6. **a)** A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función $2\pi-$periódica que coincide con e^x en $(-\pi,\pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en **a)**, a partir del desarrollo en serie exponencial.

7. Si $f(x)=|\operatorname{sen}x|$, $-\pi\leq x\leq\pi$, probar que $f(x)$ es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

8. Sea f una función de período 2π que –en $[-\pi,\pi]$– se define como $f(x)=\cos(ax)$ $(a\in\mathbb{R})$.

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n^2-b^2)^2}$, $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

9. Desarrollar en serie exponencial de Fourier $f(x)=\operatorname{sen}x$, $0\leq x\leq 1$. A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de f.

10. Si

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1<x\leq 0\\ 0 & 0\leq x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x+2)=f(x) \ \text{ para todo } \ x\in\mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x.

11. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en $(0,\pi)$:

a) $f(x)=\cos x$ **b)** $f(x)=-x$ **c)** $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}\leq x<\pi\end{cases}$

12. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

   b) $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi)$

13. **a)** Probar que la serie $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.

   b) Calcular la $n-$ésima suma parcial de esta serie.

14. Sean $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ $2\pi-$periódica y $g(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$, también $2\pi-$periódica.

   a) ¿Qué relación hay entre f y g?

   b) Calcular las series de Fourier de f y de g.

   c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f. ¿Es la serie de Fourier de g? ¿Converge?

15. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

   Sea $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen}((2n+1)x)$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$, entonces $f = g$.

16. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \ \text{ en } \ [0, 2\pi) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x \ \text{ en } \ [-\pi, \pi)$$

   Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.

17. Desarrollar $\operatorname{sen}^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

   Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

Separación de variables

18. Usando separación de variables resolver:

   a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0, y) = 8e^{-3y}.$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 1,\, t > 0.$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$, $|u(x,t)| < M$, $u(x,0) = 5\,\mathrm{sen}(4\pi x) - 3\,\mathrm{sen}(8\pi x) + 2\,\mathrm{sen}(10\pi x)$.

c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0,$

$u(x,0) = 8\,\cos\left(\dfrac{3\pi x}{4}\right) - 6\,\cos\left(\dfrac{9\pi x}{4}\right).$

d) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < \pi,\, t > 0.$

$u(x,0) = x(\pi - x), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$

donde κ es una constante positiva.