Práctica 4
Series de funciones y de potencias

1. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

   a) $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $(2,5]$ **b)** $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $(1,+\infty)$ **c)** z^n en $|z|<1$

   d) $\dfrac{n}{n+1}z$ en $\mathbb{C}$ **e)** $\dfrac{n+1}{n^2+3}\,\mathrm{sen}(2nx-\pi)$ en $\mathbb{R}$

2. Mostrar que $\dfrac{1}{1+nx}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0,1)$. Probar que esta sucesión converge uniformemente sobre todo intervalo $[a,b]\subset(0,1)$.

3. Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Probar

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge (absolutamente) si y sólo si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}(z_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}(z_n)$ convergen (absolutamente).

   b) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|.$$

4. **a)** Sea $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|<1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n$? Demostrarlo.

   b) Idem para $|\alpha|>1$. ¿Qué se puede decir en el caso $|\alpha|=1$?

   c) Probar que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$
   - converge si $|z|<1$
   - diverge si $|z|>1$.

5. **a)** Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n = \dfrac{z}{1-z}$ para $|z|<1$.

   b) Sea $z=re^{i\theta}$ con $0<r<1$. Usar **a)** para verificar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} r^n\,\mathrm{sen}(n\theta) = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

6. Estudiar la convergencia de las series numéricas cuyo término general es:

a) $\dfrac{2i}{3^n}$	**b)** $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$	**c)** $\dfrac{2^n}{5^n - n}$
d) $\dfrac{1}{n!}$	**e)** $\dfrac{n}{n^n}$	**f)** $\dfrac{n}{n^2 - n}$
g) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$	**h)** $(-1)^n \dfrac{\log n}{n}$	**i)** $\dfrac{2^n}{n^n}$
j) i^n	**k)** $\dfrac{i^n}{n}$	**l)** $\dfrac{e^{in}}{n^2}$

- **Producto de Cauchy**

  Dadas las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, se llama **producto de Cauchy** de ambas a la serie de término general $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

  Si ambas series convergen, siendo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$, y al menos una de ellas lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a AB.

7. Sean $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Verificar que $\sum a_n = \sum b_n$ convergen (condicionalmente) y que el producto Cauchy de ambas series diverge.

- **Criterio de Weierstrass**

  Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente en X.

- **Criterio de Dirichlet**

  Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y existe $M > 0$ tal que $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

8. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias, y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^n \ (a \in \mathbb{C})$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \ (a \in \mathbb{C})$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$ f)† $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$

9. Probar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ es convergente sobre los puntos del borde de su disco de convergencia, pero que esto no es verdadero para la serie de las derivadas.

10. Observar que los conceptos de convergencia uniforme y absoluta son independientes, probando:

    a) La serie $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ converge absoluta pero no uniformemente en $|z| < 1$.

    b) La serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge uniformemente pero no absolutamente en $[\delta, 2\pi - \delta],\ 0 < \delta < 2\pi$.

    c) La serie $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $|z| \leq 1$.

11. a) Determinar el conjunto de valores z para los cuales la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ converge y hallar su suma.

    b) Idem para $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$.

12. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de las series:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

† Sobre el borde estudiar únicamente para $z = 1, i, -i$

13. **Exponencial**: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

a) Probar que es entera y calcular su derivada.

b) Probar que $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$.

c) Calcular: $\left|e^z\right|$, $\operatorname{Arg} e^z$, $\operatorname{Re}(e^z)$, $\operatorname{Im}(e^z)$, $\overline{e^z}$

d) Probar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y calcular $1/e^z$.

e) Analizar la existencia de $\lim_{|z|\to\infty} e^z$.

f) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

g) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tale que $e^z = \pm 1$.

h) Mostrar que $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

14. **Funciones trigonométricas**

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

a) Probar que $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ son enteras y calcular sus derivadas.

b) Probar que

i) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

ii) $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

iii) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

iv) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

v) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$
$\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$

c) Verificar que ambas tienen período 2π.

d) i) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z = 0$.
ii) Idem para $\cos z$.

15. **Funciones hiperbólicas**

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

a) Verificar

i) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$, $\cos(iz) = \cosh z$

ii) $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$, $\cosh(iz) = \cos(z)$

iii) $\operatorname{senh} |\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \cosh(\operatorname{Im} z)$, $\operatorname{senh} |\operatorname{Im} z| \leq |\cos z| \leq \cosh(\operatorname{Im} z)$
Deducir que $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ no son acotadas en $\mathbb{C}$.

iv) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z)\cosh(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{senh}(\operatorname{Im} z)\cos(\operatorname{Re} z)$
$\cos z = \cos(\operatorname{Re} z)\cosh(\operatorname{Im} z) - i \operatorname{senh}(\operatorname{Im} z)\operatorname{sen}(\operatorname{Re} z)$

b) Probar

i) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2(\operatorname{Re} z) + \operatorname{senh}^2(\operatorname{Im} z)$

ii) $|\cos z|^2 = \cos^2(\operatorname{Re} z) + \operatorname{senh}^2(\operatorname{Im} z)$

c) Caracterizar los conjuntos $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{sen} z = 8\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \cos z = i\}$.

d) Estudiar la periodicidad de $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$.

e) Hallar los ceros de ambas funciones.

f) Hallar el desarrollo en serie de potencias de ambas funciones.

16. **Logaritmo**

a) Dado $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.

b) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y sean $f, g : A \to \mathbb{C}$ continuas y tales que

$$e^{f(z)} = z \quad \text{y} \quad e^{g(z)} = z$$

para todo $z \in A$. Probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in A$.

c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$

i) Probar que A es abierto y conexo, y que para cada $z \in A$ existe un único $\theta_z \in (-\pi, \pi)$ tal que $z = |z|e^{i\theta_z}$.

ii) Sea $f : A \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \ln|z| + i\theta_z$. Probar que es una rama del logaritmo.

iii) Ver que f es holomorfa en A y hallar f'.

iv) ¿Siguen siendo válidos estos resultados si se reemplaza el conjunto A por $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0} / r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ donde $0 < \theta_0 \leq 2\pi$?

d) Calcular: $\ln i$, $\ln 1$, $\ln(1+i)$, $e^{\ln i}$.

17. Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, y sea $f : G \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo. Fijamos $b \in \mathbb{C}$, y consideramos la función $g : G \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = e^{bf(z)}$.

a) Probar que si $b \in \mathbb{Z}$, entonces $g(z) = z^b$.

b) Si G es un abierto conexo donde está definida una rama del logaritmo y $b \in \mathbb{C}$, definimos $z^b = e^{b \ln z}$. Probar que esta función es holomorfa en G.

c) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallar los demás valores considerando las restantes ramas. Idem para : $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π.

d) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| < 4\}$. Calcular una rama de $(z-1)^{\frac{1}{3}}$ para $z \in G$

18. Sea f la rama principal de $\ln(1+z)$, y sea $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

a) Calcular el radio de convergencia de g.

b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ para z dentro del círculo de convergencia de g.

c) Deducir que $f(z) = g(z)$ para $|z| < 1$.