Práctica 3
Derivabilidad / Ecuaciones de Cauchy - Riemann

---

1. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = z$ **b)** $f(z) = z^2$ **c)** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

2. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Probar que existe $\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-lineal, tal que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \alpha(h)}{h} = 0$$

- **Regla de L'Hospital**

  Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

3. Calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$ **c)** $\displaystyle\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3+1}$

   b) $\displaystyle\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$ **d)** $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2-2iz+1}{z^4+2z^2+1}$

4. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre sus partes real e imaginaria de modo que resulte derivable en $a \in \mathbb{R}$ y calcular $\gamma'(a)$. Calcular $\gamma'(t)$ para $\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.

5. Sean $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por
$$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \qquad g(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 + i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & x+iy \neq 0, \\ 0 & x+iy = 0. \end{cases}$$

   Demostrar que f, g son continuas en 0 y que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann pero no son derivables.

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + i(x^2y^2)}{x^4+y^2} & x+iy \neq 0, \\ 0 & x+iy = 0. \end{cases}$$

  a) Verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el $(0,0)$.

  b) Probar que f es derivable a lo largo de cualquier recta que pasa por $(0,0)$, y que todas esas derivadas coinciden en el origen.

  c) Probar que f no es derivable en $z = 0$.

7. **a)** Mostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se escriben:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

  b) Verificar que en coordenadas polares se tiene

$$f' = e^{-i\theta}\Big(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\Big) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\Big(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big).$$

  c) Calcular la derivada de $f(z) = z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\theta}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{m\theta}{n})$

8. Determinar los puntos donde f es derivable y donde es holomorfa.

  a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x+iy}{x^2+y^2} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$

  b) $f(z) = \overline{z}$

  c) $f(z) = x^2 + iy^2$

  d) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

9. Determinar si las siguientes funciones son holomorfas en los conjuntos especificados y, en caso de no serlo, encontrar un conjunto abierto en el que la función sea holomorfa o bien demostrar que no es holomorfa en ninguna parte.

  a) $f(z) = \dfrac{3+2z}{i+2z}$ en $D : |z| < 1$

  b) $f(z) = \cos x$ en $D : |z| < 1$

  c) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)$ en $\mathbb{C}$

  d) $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ en $\mathbb{C}$ (P , Q polinomios)

  e) $f(z) = \dfrac{P(z)\cdot Q(z)}{z}$ en $D : 0 < |z| < 1$ (P , Q polinomios)

10. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones y hallar $f'(z)$ en cada caso.

   a) $f(z) = z^3 - 2z$
   b) $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$
   c) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$
   d) $f(z) = x^2 + iy^3$
   e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

11. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Probar:

   a) Si f y $\overline{f}$ son holomorfas en Ω, entonces f es constante.
   b) Si f es holomorfa en Ω y $f' = 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.
   c) Si f y g son holomorfas en Ω y $f' = g'$ en Ω, entonces $f - g$ es constante en Ω.

   ¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

12. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar:

   a) $\operatorname{Re}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.
   b) $\operatorname{Im}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.
   c) $|f|$ constante $\Rightarrow f$ constante.
   d) $\operatorname{Arg}(f)$ constante $\Rightarrow f$ constante.

13. Sea $u(x,y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$.

   a) Probar que u es armónica.
   b) Encontrar v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa.
   c) Hacer lo mismo para $u(x,y) = 2x(1-y)$

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Decimos que $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es conjugada armónica de u (en Ω) si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

   a) Probar que si v y $\widetilde{v}$ son conjugadas armónicas de u en Ω, entonces v y $\widetilde{v}$ difieren en una constante aditiva. ¿Falta alguna hipótesis?
   b) Probar que si u y v son mutuamente conjugadas armónicas, entonces son constantes. ¿Falta alguna hipótesis?

15. **a)** Hallar todas las funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ tales que su parte real es $x^2 - y^2$.
   b) Hallar el polinomio armónico más general entre los de la forma:

   $$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

   Encontrar además la función armónica conjugada y la correspondiente función holomorfa.

c) Encontrar una función f holomorfa en todo el plano complejo cuya parte real sea $e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$.

d) Mostrar que $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ es armónica. Indicar su dominio de armonicidad y hallar una función holomorfa que tenga a f como parte imaginaria.

e) Dada $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 se sabe que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = F(xy)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo debe ser F?

16. Demostrar que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(z) \cdot \overline{f(z)} \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $g(z) = \log|f(z)|$ es armónica en Ω.