MATEMÁTICA IV
PRÁCTICA 9

Transformada de Laplace

Patricia Jancsa

Miércoles 23/11/2022

Transformada de Laplace

Si f es de tipo exponencial, entonces existe su Transformada de Laplace, es decir, la integral impropia converge en algún intervalo $(a, +\infty)$:

$$L[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad \forall\, s > a$$

Si $L[f(t)](s)$ está definida para $s_0 \in \mathbb{R}$ entonces también lo está para $s \in \mathbb{C} : \; Re(s) > s_0$

Transformadas Elementales

- $L[1] = \dfrac{1}{s}$
- $L[t] = \dfrac{1}{s^2}$
- $L[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ n \geqslant 0$
- $L[t^p] = \dfrac{\Gamma(p)}{s^{p+1}}, \ n \geqslant 0, \ Re(p+1) > 0, \ p \in \mathbb{C}, \ s > 0$
- $L[e^{at}] = \dfrac{1}{(s-a)} \ : \ s > Re(a)$
- $L[\text{sen}(at)] = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$
- $L[\cos(at)] = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$

$$\forall \ s > |Im(a)|$$

- $L[e^{ct} \ \text{sen}(at)] = \dfrac{a}{(s-c)^2 + a^2}$
- $L[e^{ct} \ \cos(at)] = \dfrac{s-c}{(s-c)^2 + a^2}$

Comprobación de las Transformadas del Seno y Coseno

Apunte Calvo, página 10

Ejemplo 1. Calcular la Transformada de Laplace de

$$f(t) = 2t^3 + e^{5t} + 4\,\mathrm{sen}(3t)$$

Solución. La T de Laplace es lineal, es decir:

$$L[af_1 + bf_2 + cf_3] = aL[f_1] + bL[f_2] + cL[f_3]\ \forall a, b \in \mathbb{C}$$

entonces la transformada que se pide es:

$$L[f(t)] = 2L[t^3] + L[e^{5t}] + 4L[\mathrm{sen}(3t)]$$

$$= 2\frac{3!}{s^4} + \frac{1}{s-5} + 4\frac{3}{s^2+9} \checkmark$$

Ejemplo 2. a) Hallar $g(t)$ tal que $L[f] = \dfrac{9s^2+72}{s^3+9s}$

2. b) Hallar $f(t)$ tal que $L[f] = \dfrac{5s-25}{(s^2-8s+25)}$

Solución. a) El problema es el inverso: dada $L[f]$ obtener f:
Fracciones Simples, denominador tiene un factor lineal y uno cuadrático sin raíces en $\mathbb{R}$:

$$L[f] = \frac{9s^2+72}{s^3+9s} = \frac{9s^2+72}{s(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

$$= \frac{8}{s} + \frac{s}{s^2+9}$$

La T de Laplace es lineal, es decir:

$$L[af_1 + bf_2] = aL[f_1] + bL[f_2] \ \forall a, b \in \mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow L[f] = \frac{8}{s} + \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$= 8L[1] + L[\cos(3t)] \Longrightarrow f(t) = 8 + \cos(3t) \ \checkmark$$

Para el 2.b) Usemos la Traslación

Lema de Traslación:

$$L[e^{ct}f(t)](s) = L[f(t)](s-c)$$

Comprobación:

$$L[e^{ct}f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt$$

$$= L[f(t)](s-c) \checkmark$$

Ejemplos: a partir de $L[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

- $L[e^{5t}t] = \dfrac{1}{(s-5)^2}$
- $L[e^{3t}t^5] = \dfrac{5!}{(s-3)^6}$
- $L[t^3\ e^t] = \dfrac{6}{(s-1)^4}$

Solución. 2. b) $L[f] = \dfrac{5s - 25}{(s^2 - 8s + 25)}$.

El denominador no tiene raíces en $\mathbb{R}$, por lo cual es necesario completar cuadrados:

$$s^2 - 8s + 25 = (s-4)^2 - 16 + 25 = (s-4)^2 + 9$$

Por la propiedad de Traslación:

$L[e^{at}\cos(bt)] = L[\cos(bt)](s-a)$, $L[e^{at}\operatorname{sen}(bt)] = L[\operatorname{sen}(bt)](s-a)$ es decir

$$\boxed{L[e^{at}\cos(bt)] = \frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}, \quad L[e^{at}\operatorname{sen}(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \; : \; s > 0}$$

obtenemos que

$$\boxed{L[e^{4t}\cos(3t)] = \frac{(s-4)}{(s-4)^2 + 3^2}, \quad L[e^{4t}\operatorname{sen}(3t)] = \frac{3}{(s-4)^2 + 3^2} \; : \; s > 0}$$

Usemos entonces

$$\boxed{L[e^{at}\cos(bt)] = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \quad L[e^{at}\operatorname{sen}(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \ : \ s > 0}$$

$$\Longrightarrow L[f] = \frac{5(s-4)}{(s-4)^2+9} - \frac{5}{3}\frac{3}{(s-4)^2+9} = L[e^{4t}\cos(3t)] - \frac{5}{3}L[e^{4t}\operatorname{sen}(3t)]$$

la función buscada es $\Rightarrow f(t) = 5e^{4t}\cos(3t) - \frac{5}{3}e^{4t}\operatorname{sen}(3t)$ ✓

Derivada n-ésima de la Transformada

Sea h de orden exponencial α

$$\boxed{L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)] : \;\; s > \alpha}$$

Ejemplo 3. Calcular la Transformada de Laplace de $f(t) = t^3 e^t$.

Solución: Sabemos que

$$L[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

$$\boxed{\text{Propiedad:} \quad L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)]}$$

$$\Longrightarrow L[t^3 \; e^t] = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} L[e^t] = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{(s-1)}\right) = \frac{6}{(s-1)^4} \checkmark$$

Ejemplo 4. a. Hallar $f(t)$ tal que

$$L[f] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

b. Hallar $f(t)$ tal que

$$L[f] = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Solución a) El denominador no tiene raíces en $\mathbb{R}$, porque es el cuadrado de una suma de cuadrados; de la lista

$$\frac{1}{s^2+1} = L[\operatorname{sen} t]$$

Además,

$$\frac{2s}{(s^2+1)^2} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1+s^2}\right)$$

Derivada n-ésima de la Transformada

Si h es de orden exponencial α:

$$\boxed{L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)] : \ s > \alpha}$$

$$\Longrightarrow L[f] = \frac{2s}{(s^2+1)^2} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1+s^2}\right)$$

$$= (-1)\frac{d}{ds} L[\operatorname{sen} t] = L[t \cdot \operatorname{sen}(t)]$$

$\Longrightarrow$ la función buscada es $f(t) = t \cdot \operatorname{sen}(t)$ ✓

Transformada de la primitiva

Solución 4. b) Propiedad:

$$\boxed{L[g'] = sL[g] - g(0) \Longrightarrow \frac{1}{s}\left(L[g'] + g(0)\right) = L[g]}$$

$$Si\ g(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{L[g] = \frac{1}{s}L[g']}$$

Cálculo auxiliar: $g'(t) = t \cdot \operatorname{sen} t$

$\Longrightarrow g(t) = \int_0^t x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx$

$$= \left[\operatorname{sen}(x) - x \cdot \cos(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=t}$$

$$= \operatorname{sen}(t) - t \cdot \cos(t)$$

Conclusión 4. b

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow L[f] &= \frac{1}{(s^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{2s}\frac{2s}{(s^2+1)^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\cdot L[t\cdot \mathrm{sen}(t)] \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\cdot L[g'(t)] = \tfrac{1}{2}L[g(t)] \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot L[\textstyle\int_0^t x\cdot \mathrm{sen}(x)\,dx] \\
&= \frac{1}{2}\cdot L[\mathrm{sen}\,t - t\cdot\cos t]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{sen} t - t \cdot \cos t) \checkmark$$

5) Determinar f: $L[f](s) = Log\left(1 + \dfrac{5}{s}\right)$

Solución:

$$L[f](s) = Log\left(1 + \frac{5}{s}\right) = Log\left(\frac{s+5}{s}\right) = Log\,(s+5) - Log\,(s)$$

$$\Rightarrow -L[t\,f(t)](s) = \frac{d}{ds}\,L[f](s) = \frac{d}{ds}\left[Log(s+5) - Log(s)\right] = \frac{1}{s+5} - \frac{1}{s}$$

$$= L[e^{-5t}] - L[1]$$

Por lo tanto, $-t\,f(t) = e^{-5t} - 1 \Rightarrow f(t) = -\dfrac{e^{-5t}}{t} + \dfrac{1}{t}$ ✓

Convolución

Dadas $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de tipo exponencial y suaves a trozos, el producto de convolución entre f y g se define como
$(f \star g)(t) = 0 : \ t < 0$ y

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx : \ t \geqslant 0,$$

Satisface la propiedad fundamental

$$L[f \star g] = L[f]\, L[g]$$

Ejemplo 6. a. Hallar $h(t)$ tal que

$$L[h] = \frac{20(s-1)}{((s-1)^2+1)(s^2+4)}$$

Solución:

$$L[h] = \frac{20(s-1)}{((s-1)^2+1)(s^2+4)}$$

$$= 10\,\frac{(s-1)}{((s-1)^2+1)}\,\frac{2}{(s^2+4)}$$

$$= 10L[e^t\cos(t)]\cdot L\,[\mathrm{sen}(2t)]$$

$$= 10L\left[e^t\cos(t) \star \mathrm{sen}(2t)\right]$$

$$\Longrightarrow h(t) = 10\,e^t\cos(t) \star \mathrm{sen}(2t)$$

Identidades Trigonométricas

$$\boxed{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)}{2}}$$

Calculemos: la primitiva se deja de ejercicio

$h(t) = 10\, e^t \cos(t) \star \operatorname{sen}(2t)$

$$= \quad 10 \int_0^t e^x \cos(x)\ \operatorname{sen}(2(t-x))\, dx$$

$$= \quad \frac{1}{2} e^x \Big[\operatorname{sen}((2t-3x)) + 5 \operatorname{sen}(2t-x) + 3 \cos(2t-3x) + 5 \cos(2t-x)\Big]\Big|_{x=0}^{x=t}$$

$$= \quad \frac{1}{2} e^t \left[\operatorname{sen}(-t) + 5 \operatorname{sen}(t) + 3 \cos(-t) + 5 \cos(t)\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-\operatorname{sen}(2t) - 5 \operatorname{sen}(2t) - 3 \cos(2t) - 5 \cos(2t)\right]$$

$$= \quad \boxed{2\, e^t \cdot \operatorname{sen}(t) - 3 \operatorname{sen}(2t) - 4 \cdot \cos(2t) + 4\, e^t \cos(t)\ \checkmark}$$

Otra resolución posible: por fracciones simples

$$L[h] = \frac{20(s-1)}{((s-1)^2+1)(s^2+4)}$$

$$= \frac{2(2s-1)}{(s-1)^2+1} - \frac{2(2s+3)}{s^2+4}$$

$$= \frac{4(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{2}{(s-1)^2+1} - 4\frac{s}{s^2+4} - \frac{6}{s^2+4}$$

$$= 4L[e^t\cos(t)] + 2L[e^t\,\mathrm{sen}(t)] - 4L[\cos(2t)] - 3L[\mathrm{sen}(2t)]$$

$$\Longrightarrow \boxed{4e^t\cos(t) + 2e^t\cdot\mathrm{sen}(t) - 4\cdot\cos(2t) - 3\,\mathrm{sen}(2t)\ \checkmark}$$

Ejemplo 7. a. Hallar $f(t)$ tal que

$$L[f] = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

b. Resolver $y'' + y = \mathrm{sen}(t), \quad y(0) = 1 = y'(0).$

Solución. El denominador no tiene raíces en $\mathbb{R}$, además

$$\frac{1}{s^2+1} = L[\mathrm{sen}\, t]$$

Sabemos que

$$L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)]$$

$$\Longrightarrow L[t \cdot \mathrm{sen}(t)] = (-1)\frac{d}{ds} L[\mathrm{sen}\, t] = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1+s^2}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

Por otra parte,

$$L[g'] = sL[g] - g(0) \Longrightarrow \frac{1}{s}\left(L[g'] + g(0)\right) = L[g]$$

$$Si\ g(0) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{s}L[g'] = L[g]$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow L[f] &= \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2s}\frac{2s}{(s^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\cdot L[t\cdot \operatorname{sen}(t)] = \frac{1}{2}\cdot L[\int_0^t x\cdot \operatorname{sen}(x)\,dx] \\
\Longrightarrow f(t) &= \frac{1}{2}\cdot(\operatorname{sen} t - t\cdot\cos t)
\end{aligned}$$

Otra resolución: por convolución

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (\text{sen}(t)) \star (\text{sen}(t)) \\
&= \int_0^t \text{sen}((t-x))\ \text{sen}(x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\text{sen}((2x-t)) - 2x \cdot \cos(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=t} \\
&= \frac{1}{4}\left[\text{sen}(t) - 2t \cdot \cos(t) - \text{sen}(-t)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2 \cdot \text{sen}(t) - 2t \cdot \cos(t)\right] \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left[\text{sen}(t) - t \cdot \cos(t)\right]}
\end{aligned}
$$

b. Apliquemos Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$\Longrightarrow L[y'' + y] = L[\text{sen}(t)] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Longrightarrow (s^2 + 1)L[y] - sy(0) - y'(0) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

entonces

$$\Longrightarrow L[y] = \frac{s + 1}{(s^2 + 1)} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$
$$= A + C$$

donde

$$A = \frac{s + 1}{(s^2 + 1)} = \frac{s}{(s^2 + 1)} + \frac{1}{(s^2 + 1)}$$
$$= L[\cos t] + L[\text{sen}\, t]$$

$$Item\ a) \implies C = L[f]$$

Por lo tanto, la única solución a la ecuación diferencial es

$$\boxed{y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{sen} t - t \cdot \cos t) \checkmark}$$

ECUACIONES INTEGRALES

Transformada de la Primitiva

Tenemos la propiedad

$$L[f'] = sL[f] - f(0) \Longrightarrow L[f'] + f(0) = sL[f]$$

Si además $f(0) = 0$, obtenemos

$$\Longrightarrow L[f] = \frac{1}{s} L[f']$$

En notación integral, por el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada de la función integral es el integrando evaluado en t:

$$Si \ F(t) = \int_0^t y(x)dx \Longrightarrow F'(t) = y(t)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{L\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \frac{1}{s} L[y]}$$

Ej. 8. Resolver la ecuación diferencial - integral:

$$y(t) + 2\int_0^t y(x)dx = 7$$

Solución: apliquemos la propiedad

$$\boxed{L\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \frac{1}{s}L[y]}$$

Transformada a ambos miembros $\implies L[y] + \frac{2}{s}L[y] = \frac{7}{s}$

$$= L[y]\left(1 + \frac{2}{s}\right) = L[y]\left(\frac{s+2}{s}\right)$$

$$\implies L[y] = \frac{7}{s}\left(\frac{s}{s+2}\right) = \frac{7}{s+2} \implies y(t) = 7e^{-2t} \checkmark$$

Atención: en el problema anterior, la condición inicial está dada evaluando ambos miembros en $t = 0$:

$$y(t) + 2\int_0^t y(x)dx = 7 \implies y(0) = 7$$

por lo cual, la solución hallada es única y verifica $y(0) = 7$ pues

$$y(t) = 7e^{-2t} \implies y(0) = 7$$

Ejemplos Adicionales usando Propiedades Elementales

Ejemplo 6. Calcular la Transformada de Laplace de $f(t) = t^3 e^{2t} + 5\cos(4t)$.

Solución a) T de Laplace es lineal, entonces

$$L[f(t)] = L[t^3 e^{2t}] + L[5\cos(4t)] = A + B = A + \frac{5s}{s^2+16}$$

A. Sabemos que $\boxed{L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}}$

$$\textit{Propiedad}: \quad \boxed{L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)]}$$

$$\Longrightarrow L[t^3\ e^{2t}] = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} L[e^{2t}] = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{(s-2)}\right) = \frac{6}{(s-2)^4}$$

Por lo tanto

$$L[f(t)] = A + B$$

$$= L[t^3 e^{2t}] + L[5\cos(4t)] = \frac{6}{(s-2)^4} + \frac{5s}{s^2+16} \checkmark$$

Ejemplo 7.
Calcular la Transformada de Laplace de $f(t) = t^2 e^{2t} \operatorname{sen} t$.

Solución: Sabemos que $L[e^{2t} \operatorname{sen} t] = \dfrac{1}{(s-2)^2+1}$

$$Propiedad: \quad L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)]$$

$$\Longrightarrow L[t^2\, e^{2t} \operatorname{sen} t] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} L[e^{2t} \operatorname{sen} t] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-2\cdot(s-2)}{((s-2)^2+1)^2}\right)$$

$$= -2\frac{((s-2)^2+1)^2 - 4(s-2)^2\cdot((s-2)^2+1)}{((s-2)^2+1)^4}$$

$$= \frac{6s^2-24s+22}{((s-2)^2+1)^3} \checkmark$$

Ejemplo 8. Hallar $f(t)$ tal que

$$L[f] = \frac{20}{(s^2 - 2s + 26)}$$

Solución: El denominador no tiene raíces en $\mathbb{R}$, por lo cual es necesario completar cuadrados:

$$s^2 - 2s + 26 = (s-1)^2 + 25 = (s-1)^2 + 5^2 =$$

Sabemos que

$$\boxed{L[e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{5}{(s-1)^2+5^2} = L[e^{t}\,\mathrm{sen}(5t)]$$

$$\Longrightarrow L[f] = \frac{20}{(s^2-2s+26)} = 4\cdot\frac{5}{(s-1)^2+25}$$

$$= 4\cdot L[e^{t}\,\mathrm{sen}(5t)]$$

$$\Rightarrow f(t) = 4\cdot e^{t}\,\mathrm{sen}(5t) \checkmark$$

Ejemplo 9. a. Hallar $f(t)$ tal que

$$L[f] = \frac{12s}{(s^2+36)^2}$$

b. Hallar $f(t)$ tal que

$$L[f] = \frac{1}{(s^2+36)^2}$$

Solución a) El denominador no tiene raíces en $\mathbb{R}$, porque es el cuadrado de una suma de cuadrados, pero sabemos que

$$\frac{6}{s^2+36} = L[\text{sen}(6t)]$$

Además,

$$(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \frac{12s}{(s^2+36)^2}$$

Por otra parte, la propiedad

$$L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)]$$

$$\Longrightarrow \frac{12s}{(s^2+36)^2} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = (-1)\frac{d}{ds}L[\mathrm{sen}(6t)]$$
$$= L[t \cdot \mathrm{sen}(6t)]$$

Por lo tanto, la función buscada es

$$\Longrightarrow f(t) = t \cdot \mathrm{sen}(6t) \checkmark$$

Solución 9. b

Solución b) Propiedad:

$$\boxed{L[g'] = sL[g] - g(0) \Longrightarrow \frac{1}{s}\left(L[g'] + g(0)\right) = L[g]}$$

$$Si\ g(0) = 0 \Longrightarrow L[g] = \frac{1}{s} L[g']$$

Cálculo auxiliar: $\int_0^t x \cdot \operatorname{sen}(6x)\, dx = \frac{1}{36}[\operatorname{sen}(6x) - 6x \cdot \cos(6x)]\Big|_{x=0}^{x=t}$

$$= \frac{1}{36} \cdot [\operatorname{sen}(6t) - 6t \cdot \cos(6t)]$$

Conclusión 9. b

$$\Longrightarrow L[f] = \frac{1}{(s^2+36)^2}$$

$$= \frac{1}{12s}\frac{12s}{(s^2+36)^2}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s}\cdot L[t\cdot \text{sen}(6t)] = \frac{1}{12}\cdot L[\int_0^t x\cdot \text{sen}(6x)\,dx]$$

$$= \frac{1}{12}\frac{1}{36}\cdot L[\text{sen}(6t) - 6t\cdot\cos(6t)]$$

la función buscada es $\Longrightarrow f(t) = \dfrac{1}{432}\cdot(\text{sen}(6t) - 6t\cdot\cos(6t))$ ✓

Ejemplo 10. Calcular la Transformada de Laplace de $f(t) = t^2 e^{2t} \operatorname{sen} t$.

Solución: Sabemos que $L[e^{2t} \operatorname{sen} t] = \dfrac{1}{(s-2)^2+1}$

$$\textit{Propiedad}: \quad L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)]$$

$$\Longrightarrow L[t^2\ e^{2t} \operatorname{sen} t] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} L[e^{2t} \operatorname{sen} t] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-2\cdot(s-2)}{((s-2)^2+1)^2}\right)$$

$$= -2\frac{((s-2)^2+1)^2 - 4(s-2)^2\cdot((s-2)^2+1)}{((s-2)^2+1)^4}$$

$$= -2\frac{(s-2)^2+1-4(s-2)^2}{((s-2)^2+1)^3} = -2\frac{1-3(s-2)^2}{((s-2)^2+1)^3} = \frac{6s^2-24s+22}{((s-2)^2+1)^3} \checkmark$$

Funciones periódicas.

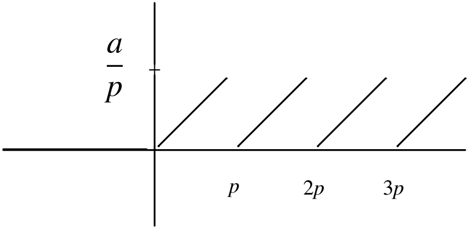
Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ periódica de período p, entonces su transformada de Laplace se calcula en la forma

$$L[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$

Funciones periódicas

Ejemplo 11. Obtener la transformada de Laplace de la **función diente de sierra**, periódica de período $p = 2$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ t & si\ 0 \leqslant t < 2 \\ (t - 2n) & si\ 2n \leqslant t < 2(n+1) : n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Solución: Se pide calcular la transformada

$$L[f](s) = \frac{1}{(1-e^{-2s})}\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt = \frac{1}{(1-e^{-2s})}\int_0^2 e^{-st}\; t\,dt$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-2s})}\frac{1}{s^2}\left(-e^{-ts}(st+1)\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{(1-e^{-2s})}\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-2s}(2s+1\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1-\frac{2s\;e^{-2s}}{1-e^{-2s}}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1+\frac{2s}{1-e^{2s}}\right)$$

Atención: f no es la primitiva de ninguna función integrable porque no es continua.