COMPLEMENTO PRÁCTICA 9 - EJERCICIO 10
APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Ejercicio 1 (Ecuación del Calor en $\mathbb{R}$)
Resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \end{cases}$$

Previo a resolver la ecuación, hagamos una posible interpretación física de lo que nos propone el problema. Si consideramos que $\mathbb{R}$ es un alambre infinito, podemos pensar que estamos calentando un segmento (el intervalo $[-1,1]$) en el instante $t = 0$, y veremos cómo se difunde el calor a lo largo de la recta en ambas direcciones a medida que el tiempo transcurre (ver Figura 1).

Figure 1

Para resolver el problema vamos a aplicar la **tranformada de Fourier** al problema (1) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_x\Big(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Big)(\xi) = 0 \\ \mathcal{F}_x(u(x,0))(\xi) = \mathcal{F}_x(\chi_{[-1,1]}(x))(\xi) \end{cases}$$

El subíndice x en la $\mathcal{F}$ es para indicar que estamos aplicando la transformada en esta variable (y **no** en la t). Si usamos que la transformada es lineal llegamos a

$$\mathcal{F}_x(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))(\xi) - \mathcal{F}_x(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t))(\xi) = 0$$

Si asumimos a priori condiciones de regularidad sobre la solución podemos intercambiar la transformada con la derivación respecto de t de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{F}_x(u(x,t))(\xi)\Big) - \mathcal{F}_x(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t))(\xi) = 0$$

A lo largo de la resolución del ejercicio vamos a usar propiedades de la transformada de Fourier que iremos recordando a medida que las vayamos usando, comenzando por la siguiente

Propiedad 1:
$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x))(\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}(f(x))(\xi)$$

Si usamos este resultado la ecuación anterior nos queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{F}_x(u(x,t))(\xi)\Big) - (i\xi)^2 \mathcal{F}_x(u(x,t))(\xi) = 0$$

Llamaremos $U(\xi, t) = \mathcal{F}_x(u(x,t))(\xi)$ Luego el problema original (1) se puede traducir en el siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 U(\xi, t) = 0 \\ U(\xi, 0)) = \mathcal{F}_x(\chi_{[-1,1]}(x))(\xi) = \dfrac{2\sin(\xi)}{\xi} \end{cases}$$

Resolvamos la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 U(\xi, t)$$

cuya solución sabemos que es

$$U(\xi, t) = C(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

usando que

$$U(\xi, 0) = C(\xi) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$$

obtenemos lo siguiente

$$U(\xi, t) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi} e^{-\xi^2 t}$$

Enunciemos otra propiedad

Propiedad 2:
$$\mathcal{F}\big((f * g)(x)\big)(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi)\mathcal{F}(g(x))(\xi)$$

Ya sabemos que

$$\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]}(x))(\xi) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$$

Necesitamos hallar una función $g(x)$ tal que

$$\mathcal{F}(g(x))(\xi) = e^{-\xi^2 t} \tag{2}$$

Si miramos la tabla de Fourier tenemos lo siguiente

Propiedad 3:
$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

Si miramos (2) para poder usar la **Propiedad 3** necesitamos saber quién es a, para eso igualamos

$$\frac{1}{4a} = t \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4t} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{4\pi t}$$

Entonces

$$e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sqrt{4\pi t}e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathcal{F}\big(e^{\frac{-x^2}{4t}}\big)(\xi) = \mathcal{F}\big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}}_{g(x)}\big)(\xi)$$

Luego, como

$$U(\xi,t) = \mathcal{F}(u(x,t))(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi)\mathcal{F}(g(x))(\xi)$$

por la **Propiedad 2** llegamos a

$$u(x,t) = (f * g)(x)$$

Veamos qué aspecto tiene esta función

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(x)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-1}^{1} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}dy \end{aligned}$$

En el gráfico que se ve a continuación se ve la función en tiempo $t = 0$ junto con tres instantes de tiempo positivos.

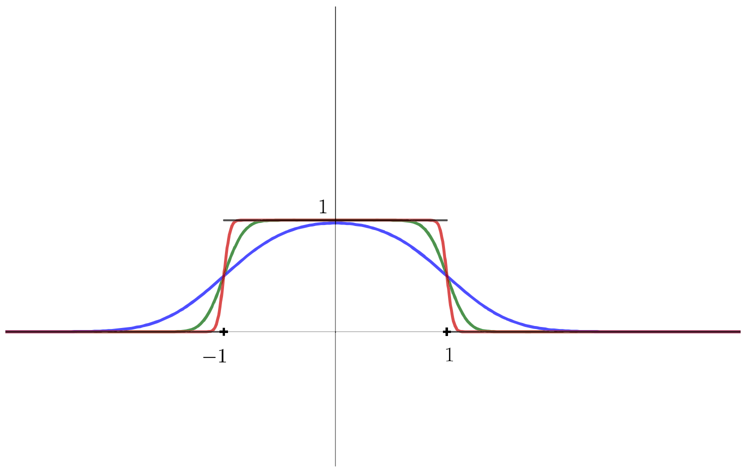

FIGURE 2

Observemos que esta función es $\mathscr{C}^\infty$ para todo $t > 0$, sin embargo, en $t = 0$ es discontinua. Es decir, tenemos una función que inicialmente es dicontinua, pero al tomar un tiempo $t > 0$, no importa lo chico que sea, la función es infinitamente derivable.
Además, a medida que t aumenta la función se aproxima uniformemete al eje x. Esto se puede interpretar como el calor que va pasando del intervalo a toda la recta, tendiendo a distribuirse de manera homogénea.
Un último comentario es que en tiempo $t = 0$ la función es nula fuera del intevalo $[-1, 1]$ (no tiene temperatura) pero que si tomamos un $t > 0$ (no importa lo chico que se elija) $u(x,t) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es lo que se conoce como velocidad de propagación infinita, y se puede pensar como que una porción del calor llega instantáneamente a todos los puntos del alambre inmediatamente después de abandonar el estado inicial $t = 0$.

Ejercicio 2 (Ecuación de Tranporte):

Dado $a > 0$, resolver la ecuación en derivadas parciales

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = e^x \chi_{(-\infty,0]}(x) \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier llegamos a

$$\begin{cases} \mathcal{F}_x\big(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\big)(\xi) + a\mathcal{F}_x\big(\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\big)(\xi) = 0 \\ \mathcal{F}_x(u(x,0))(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi) \end{cases}$$

Si llamamos $U(\xi,t) = \mathcal{F}_x\big(u(x,t)\big)(\xi)$ y suponemos nuevamente que podemos intercambiar la transformada con la derivación respecto de t obtenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(\xi,t) + a(i\xi)U(\xi,t) = 0 \\ U(\xi,0)) = \mathcal{F}(f(x))(\xi) \end{cases}$$

en este último paso hemos usado la **Propiedad 1**. Si resolvemos esta ecuación ordinaria llegamos a

$$U(\xi,t) = C(\xi)e^{-ai\xi t}$$

Si imponemos la condición inicial obtenemos

$$U(\xi,0) = C(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi)$$

Calculemos $\mathcal{F}(f(x))(\xi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x))(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\chi_{(-\infty,0]}(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\xi)}dx = \frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{1}{1-i\xi} \end{aligned}$$

Luego

$$U(\xi,t) = \underbrace{\frac{1}{1-i\xi}}_{\mathcal{F}(f(x))(\xi)} e^{-ai\xi t}$$

Recordamos a continuación otra propiedad de la transformada de Fourier

Propiedad 4:

$$\mathcal{F}(f(x-\alpha))(\xi) = e^{-i\alpha\xi}\mathcal{F}(f(x)(\xi)$$

En el ejemplo $\alpha = at$, entonces obtenemos lo siguiente

$$U(\xi,t) = e^{-ai\xi t}\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \mathcal{F}(f(x-at))(\xi)$$

Luego

$$u(x,t) = f(x-at)$$

Como se ve en la Figura 3, la solución es un desplazamiento del dato inicial a través de la curva característica.

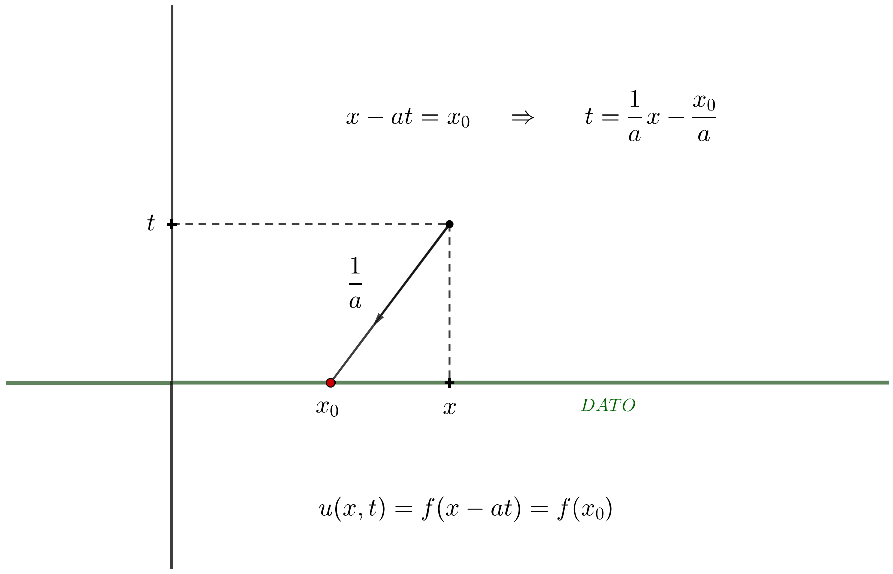

FIGURE 3

Ejercicio 3 (Ecuación de Ondas):

Resolver la ecuación en derivadas parciales

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \end{cases}$$

Aplicando la **Transformada de Fourier** y utilizando los mismos métodos que en los ejemplos anteriores, si llamamos $U(\xi,t) = \mathcal{F}_x\big(f(x,t)\big)(\xi)$, obtenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\xi,t) - (i\xi)^2 U(\xi,t) = 0 \\ U(\xi,0) = \mathcal{F}(f(x))(\xi) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(\xi,0) = \mathcal{F}(g(x))(\xi) \end{cases}$$

Nos interesa resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\xi,t) + \xi^2 U(\xi,t) = 0$$

cuya solución vimos en la práctica pasada que es

$$U(\xi,t) = A(\xi)\sin(\xi t) + B(\xi)\cos(\xi t)$$

Si usamos las condiciones iniciales

$$U(\xi,0) = B(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi)$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\xi,0) = \xi A(\xi) = \mathcal{F}(g(x))(\xi)$$

Así llegamos a

$$U(\xi,t)=\underbrace{\frac{\mathcal{F}(g(x))(\xi)}{\xi}\sin(\xi t)}_{I}+\underbrace{\mathcal{F}(f(x))(\xi)\cos(\xi t)}_{II}$$

Analicemos primero II

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi)\cos(\xi t)=\mathcal{F}(f(x))(\xi)\frac{e^{i\xi t}+e^{-i\xi t}}{2}=\frac{1}{2}\big(e^{i\xi t}\mathcal{F}(f(x))(\xi)+e^{-i\xi t}\mathcal{F}(f(x))(\xi)\big)$$

Usando la **Propiedad 4** obtenemos

$$II=\mathcal{F}_x\Big(\frac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\Big)$$

Para resolver I vamos a enunciar una propiedad cuya prueba queda como ejercicio para el lector

Propiedad 5 :
Sea $\varphi(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ entonces

$$\mathcal{F}(\varphi(x))(\xi)=2\frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

Entonces usando este resultado junto con la **Propiedad 2** tenemos

$$I=\frac{1}{2}\mathcal{F}\big(g(x)\big)(\xi)2\frac{\sin(\xi t)}{\xi}=\frac{1}{2}\mathcal{F}\big((g*\chi_{[-t,t]})(x)\big)(\xi)$$

Ahora bien

$$\frac{1}{2}(g*\chi_{[-t,t]})(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[-t,t]}(y)g(x-y)dy=\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}g(x-y)dy$$

Hagamos el siguiente cambio de variables

$$\begin{cases} z=x-y \\ dz=-dy \end{cases}$$

si $y=-t$ entonces $z=x+t$, mientras que si $y=t$ sucede que $z=x-t$. Aplicando el cambio de variables nos queda

$$\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}g(x-y)dy=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(z)dz$$

Finalmente, usando la linealidad de la transformada de Fourier obtenemos lo siguiente

$$U(\xi,t)=\mathcal{F}_x\Big(\frac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy\Big)$$

Es decir

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy$$

Lo que se conoce como **Fórmula de D'Alembert**.