MATEMÁTICA 2 - Segundo Cuatrimestre 2025

Práctica 8 - Formas bilineales

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente y determinar si la forma bilineal es simétrica. Para las formas bilineales simétricas, calcular su núcleo.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x, y) = -x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2$

iii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x, y) = x_1^2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2^2$

iv) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ \ \Phi(x, y) = x_1y_1 + (2 + i)x_2y_1 + 2x_2y_2 + (2 + i)x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_3y_3$

vi) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x, y) = (3x_1 + x_2 - x_3)(4y_2 + 2y_3)$

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$):

i) $\Phi : K^n \times K^n \to K,\ \ \Phi(x, y) = x.A.y^t$, donde $A \in K^{n\times n}$.

ii) $\Phi : K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K,\ \ \Phi(A, B) = tr(A^t.C.B)$, donde $C \in K^{m\times m}$.

Ejercicio 3. Hallar una forma bilineal simétrica $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Nu}(\Phi) = \langle(1, 2, -1)\rangle$ y $\Phi((1, 1, 1),(1, 1, 1)) < 0$. Calcular la matriz de Φ en la base canónica.

Ejercicio 4. Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base ortonormal tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_3 - x_4y_4$.

Ejercicio 5. Para cada una de las formas bilineales simétricas reales dadas en la base canónica por las matrices siguientes, hallar una base tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal con 1, -1 y 0 en la diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$