Práctica 6

Subvariedades de $\mathbb{R}^n$

1. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto y $k \in \mathbb{N}_0$. Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

   (a) Para cada punto $x \in M$ existen abiertos U, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tales que $x \in U$ y
   $$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}) = \{y \in V : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}.$$

   (b) Para todo punto $x \in M$ existen abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable inyectiva $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ tales que
   $$x \in U, \quad \phi(W) = M \cap U, \quad D\phi(y) \text{ tiene rango } k \text{ para todo } y \in W,$$
   $$\phi^{-1} : \phi(W) \to W \text{ es continua.}$$

   Cuando se cumplen, decimos que M es una *subvariedad de dimensión k de $\mathbb{R}^n$*. Si $x \in M$ y $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ satisfacen las condiciones de (ii), decimos que ϕ es una *parametrización regular de M alrededor de x*.

2. Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión k y $N \subseteq M$ es un abierto relativo, entonces N es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k.

3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, sea $k \in \{0, \dots, n\}$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ una función diferenciable que tiene a $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ en su imagen. Si para cada $x \in f^{-1}(0)$ el rango de $f'(x)$ es $n-k$, entonces el conjunto $M = f^{-1}(0)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y sea
   $$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in \mathbb{R}^n\}$$
   su gráfico. Entonces Γ_f es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimensión n si f es diferenciable.

5. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Las siguientes condiciones son equivalentes:

   (a) Para cada $x \in M$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $g : U \to \mathbb{R}$ tales que $x \in U$ y $g|_{U \cap M} = f$.

   (b) Para cada $x \in M$ existe una parametrización regular $\phi : W \to M$ de M alrededor de x, la composición $f \circ \phi : W \to \mathbb{R}$ es diferenciable,

(c) Para cada $x \in M$ y cada parametrización regular $\phi : W \to M$ de M alrededor de x, la composición $f \circ \phi : W \to \mathbb{R}$ es diferenciable,

Cuando estas condiciones se cumplen, decimos que f es *diferenciable.*

6. Si $M \subseteq \mathbb{R}^m$ y $N \subseteq \mathbb{R}^n$ son subvariedades y $f : M \to N$ es una función, decimos que f es *diferenciable* si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la composición $p_i \circ f : M \to \mathbb{R}$ de f con la proyección i-ésima $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

   Muestre que si $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ y $P \subseteq \mathbb{R}^p$ son subvariedades y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables, entonces la función $g \circ f : M \to P$ es también diferenciable.

7. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k y sea $x \in M$. Si $f : W \to \mathbb{R}^n$, con $W \subseteq \mathbb{R}^k$, es una parametrización regular de M alrededor de x y $w \in W$ es tal que $f(w) = x$, entonces el subespacio vectorial

$$T_xM = f'(w)(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^n$$

   depende solamente de M y de x. Llamamos a T_xM el *espacio tangente a M en x*. Para verificar esto, muestre que T_xM es el conjunto de vectores $v \in \mathbb{R}^n$ tales que existe $\varepsilon > 0$ y una función diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ con imagen en M y tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$.

8. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^m$ y $N \subseteq \mathbb{R}^n$ subvariedades y sea $f : M \to N$ es una función diferenciable. Si $x \in M$, muestre cómo construir una función lineal $f'(x) : T_xM \to T_{f(x)}M$ que merezca llamarse la *diferencial de f en x* y pruebe una *regla de la cadena* para funciones entre subvariedades.

9. (a) Sean M, N dos subvariedades de igual dimensión de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, con M compacta. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable e $y \in N$ un valor regular. Probar que $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito.

   (b) En base a lo probado en (a), podemos definir una función h que a cada valor regular y de f le asigna $h(y) = \#f^{-1}(y)$. Probar que h es localmente constante (o sea, que para cada y valor regular existe un abierto $V \subset N$ tal que $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$ si $y' \in V$).

10. Sea $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$ la función

$$f(x : y : z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$$

   (a) Verifique que f está bien definida y que es inyectiva.

   (b) Pruebe que el diferencial d_pf es inyectivo para todo $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

   (c) Concluya que la imagen de f es una superficie regular difeomorfa a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Superficies

11. Probar que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es una superficie regular y exhibir una parametrización regular en un entorno de cada punto.

12. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular contenida en el plano xz, de la forma $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$ con $x(t) > 0$ para todo t. Si rotamos la curva α alrededor del eje z obtenemos una *superficie de revolución*. Podemos parametrizar esta superficie usando parámetros t y θ: t indica la posición en la curva y θ es el ángulo de rotación. Explícitamente, esta parametrización está dada por

$$\Phi(t, \theta) = x(t)(\cos\theta, \sin\theta, 0) + z(t)(0, 0, 1).$$

    (a) Probar que si $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, la fórmula anterior define una parametrización regular $\Phi : (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ de la superficie de revolución generada por α.

    (b) Sean $0 < a < b$. La circunferencia $(x - b)^2 + z^2 = a^2$ en el plano xz genera una superficie de revolución que se llama *toro*. Probar que el toro es una superficie regular.

13. *Proyección estereográfica en S^2.* Sea S^2 la esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Notemos N al punto $(0, 0, 1) \in S^2$. La *proyección estereográfica* es la función $\pi_N : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ que a un punto $p \in S^2 - \{N\}$ le asigna el punto de intersección entre el plano xy y la recta que pasa por N y p. Hallar una fórmula para la función inversa $\pi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\}$ y probar que es una parametrización regular de la esfera.

14. Probar que el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es una superficie regular y describir posibles parametrizaciones regulares.

15. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son superficies regulares y encontrar una parametrización en un entorno de cada punto regular:

    (a) Cono: $z^2 = x^2 + y^2$;

    (b) Paraboloide hiperbólico: $x^2 - y^2 - z = 0$;

16. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por $V = \{(x, y, z) |\, x^2 - y^2 z = 0\}$ (llamado *el paraguas de Whitney*).

    (a) Calcular las singularidades de V.

    (b) Verificar que por cada punto (x, y, z) de V tales que $z \geq 0$ pasa una recta contenida en V, por los puntos $(0, 0, z)$ con $z \geq 0$ pasan exactamente tres rectas contenidas en V y por los puntos $(0, 0, z)$ con $z < 0$ sólo pasa el eje z.

    (c) En particular en los puntos fuera del eje z, el conjunto V es localmente una superficie regular, en los puntos $(0, 0, z)$ con $z > 0$ es localmente homeomorfa a la unión de dos superficies regulares y en los puntos $(0, 0, z)$ con $z < 0$ es localmente una recta.

17. Sea $V \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ una superficie dada por un polinomio $F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_3]$ homogéneo de grado d.

    (a) Probar que toda recta $\ell \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ cumple $V \cap \ell \neq \emptyset$.

    (b) Probar que, si $\ell \nsubseteq V$, entonces $l \cap V$ consiste en *a lo sumo* d puntos.

18. Sea $F \in k[x_0, \ldots, x_3]$ un polinomio homogéneo de grado 2 y sea

    $V = \{x \in \mathbb{P}^3_k | \ F(x) = 0) \subseteq \mathbb{P}^3_k$ la superficie implícita asociada. Probar que si V tiene más de un punto singular, entonces existe un polinomio L de grado 1 tal que $F = L^2$.

    Sugerencia: considerar la recta que une dos puntos singulares de V.

19. Sea ϕ la función $\phi : \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$ dada por

    $$\phi((x : y), (u : v)) = (xu : yv : xv : yu).$$

    Probar que ϕ es inyectiva y que su imagen es una superficie no singular de grado 2.

20. Sea $V \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ una cuádrica no degenerada.

    (a) Probar que V es homeomorfa a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ usando la función del ejercicio anterior como homeomorfismo.

    (b) Concluir que por cada punto de V pasan exactamente dos rectas contenidas en V.

Primera forma fundamental

21. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de las siguientes superficies paramétricas en los puntos regulares.

    (a) Elipsoide: $\Phi(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u))$;

    (b) Paraboloide elíptico: $\Phi(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2)$;

    (c) Paraboloide hiperbólico: $\Phi(u, v) = (au \cosh(v), bu \sinh(v), u^2)$;

    (d) Hiperboloide: $\Phi(u, v) = (a \sinh(u) \cos(v), b \sinh(u) \sin(v), c \cosh(u))$.

22. Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

23. Las curvas coordenadas de una parametrización $\Phi(u, v)$ forman una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.

    (a) Probar que una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que

    $$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

(b) Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = 1,$$

donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

24. Probar que toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que los coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = E(v), \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$