Geometría Proyectiva - Primer Parcial - Soluciones

1. Para el ejercicio (a) hay que perseguir ángulos en el dibujo y plantear algunas ecuaciones. Sea F el punto de intersección entre AD y EB. Llamemos $\alpha = \angle CAB$ y sean $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle BCA$ entonces tenemos que

   - $\pi = \alpha + \beta + \gamma$
   - $\pi = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \angle CDA$

   De donde surge que $\angle CDA = \beta + \frac{1}{2}\alpha$. Mirando el triángulo FBD obtenemos la ecuación $\pi = \frac{\pi}{2} + \angle FBD + \beta + \frac{1}{2}\alpha$ de la cual surge que $\angle FBD = \angle EBD = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha - \beta$. Por arco capaz en la cuerda ED tenemos que $\angle DAE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha - \beta$ y luego

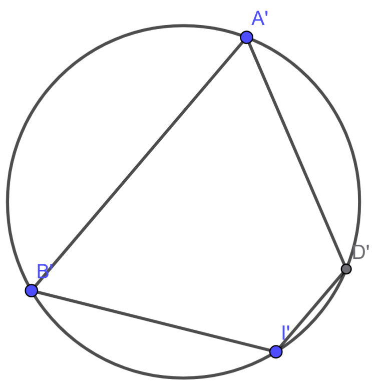
   $$\angle EAB = \frac{1}{2}\alpha - DAE = \frac{1}{2}\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \beta$$

   que por la primera ecuación arroja

   $$\angle EAB = \pi - \gamma - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

   Una vez terminado esto sea O el circuncentro del triángulo ABC. Notemos que el triángulo OAB es isósceles y su ángulo central $\angle AOB = 2\gamma$ por el teorema de arco capaz. Entonces $\angle OAB = \frac{1}{2}(\pi - 2\gamma) = \frac{\pi}{2} - \gamma = \angle EAB$ y luego las rectas AO y AE cortan a la recta AB con exactamente el mismo ángulo, mostrando que son la misma recta y luego deben ser A, O y E colineales.

2. Para hacer el segundo problema seguimos la sugerencia y hacemos una inversión con centro C y radio arbitrario r. Las dos circunferencias tangentes en C que construye el enunciado del problema se invierten en dos rectas paralelas $A'B'$ y $I'D'$. Como los ángulos $\angle IAB$ y $\angle IDB$ son iguales el cuadrilátero $IADB$ es cíclico y luego se invierte en un cuadrilátero cíclico que tiene dos lados paralelos como en la figura a continuación

   Vamos a probar ahora que las longitudes de $B'I'$ y $A'D'$ son iguales. Como el cuadrilátero es cíclico se tiene que $\angle A'B'D' = \angle A'I'D'$ pero además como las rectas $B'I'$ y $A'D$ son paralelas tenemos que el ángulo $\angle A'I'D'$ es exactamente igual a $B'A'I'$ y luego las cuerdas $B'I'$ y $A'D'$ tienen asociado el mismo ángulo central en la circunferencia. Eso implica que son iguales y la sugerencia queda probada. Por último, si $|B'I'| = |A'D'|$ entonces por la fórmula para la distancia entre dos puntos invertidos tenemos que

$$\frac{|BI|r^2}{|CB||CI|} = \frac{|AD|r^2}{|CA||CD|}$$

que equivale a lo que queríamos demostrar.

3. Para probar que la función está bien definida debemos ver que no depende del representante elegido. Pero tenemos que $f(\lambda x_0 : \lambda x_1) = (\lambda^4 x_0^4 : \lambda^4 x_0^3 x_1 : \lambda^4 x_0^2 x_1^2 : \lambda^4 x_0 x_1^3 : \lambda^4 x_1^4) = (x_0^4 : x_0^3 x_1 : x_0^2 x_1^2 : x_0 x_1^3 : x_1^4)$. Mostrando que el resultado es independiente del representante elegido para un elemento de $\mathbb{P}^1$. Para ver que la función es inyectiva supongamos que $f(x_0 : x_1) = f(y_0 : y_1)$. Entonces tendríamos que

$$(x_0^4 : x_0^3 x_1 : x_0^2 x_1^2 : x_0 x_1^3 : x_1^4) = (y_0^4 : y_0^3 y_1 : y_0^2 y_1^2 : y_0 y_1^3 : y_1^4)$$

o lo que es lo mismo, que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x_0^4, x_0^3 x_1, x_0^2 x_1^2, x_0 x_1^3, x_1^4) = \lambda(y_0^4, y_0^3 y_1, y_0^2 y_1^2, y_0 y_1^3, y_1^4).$$

Pero entonces, si tanto y_0 como y_1 son no nulos tendríamos que $(\frac{x_0}{y_0})^4 = (\frac{x_1}{y_1})^4 = \lambda$ lo cual implica que $(x_0, x_1) = \lambda^{\frac{1}{4}}(y_0, y_1)$ probando que $(x_0 : x_1) = (y_0 : y_1)$. Por otro lado, si y_i se anula tendríamos que x_i también debería anularse y nuevamente $(x_0 : x_1) = (y_0 : y_1)$. Para hacer el ítem b sean $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^4$. Si intersecamos el hiperplpano $y_1 = 0$ con la imagen de la curva f obtenemos los dos puntos (1:0:0:0:0) y (0: 0: 0: 0: 1). Supongamos que existe una F proyectiva como en el enunciado. Sea L una recta en $\mathbb{P}^4$ tal que $F|_L = f$ y $H = F^{-1}(\{y_2 = 0\})$ un hiperplano en el dominio de F. Como en $\mathbb{P}^4$ la intersección entre un hiperplano y una recta es siempre un único punto, tenemos que si existiera una F como en el enunciado valdría que

$$F(L \cap H) = F(L) \cap F(H) = \{(1 : 0 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 0 : 0 : 1)\}$$

lo cual es un absurdo porque $L \cap H$ consiste de un único punto.

4. Podemos sin pérdida de generalidad suponer que uno de los círculos está centrado en $(0, 0)$ y el otro en $(x_0, 0)$ pues podemos aplicar un movimiento euclídeo a toda la configuración que lleve el problema a esta situación. En tal caso, la ecuación del primer círculo es $x^2 + y^2 = r^2$ y la del segundo círculo es $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ que al homogeneizarlas nos dan las ecuaciones $X^2 + Y^2 = r^2 Z^2$ y $X^2 - 2x_0 XZ + Y^2 = (r^2 - x_0^2)Z^2$ respectivamente. El pincel de cuádricas en cuestión es entonces la recta que une estas dos cuádricas en el espacio de cuádricas que está dada por

$$(\lambda + \mu)X^2 + (\lambda + \mu)Y^2 + \lambda r^2 + \mu(r^2 - x_0^2)Z^2 - 2x_0 \mu XZ = 0).$$

Buscamos identificar qué cuádricas son degeneradas en este pincel para lo cual buscamos saber para qué valores de λ y μ en $\mathbb{R}$ obtenemos que la matriz simétrica asociada tiene determinante cero. Esta matriz es

$$\begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & -x_0 \mu \\ 0 & \lambda + \mu & 0 \\ -x_0 \mu & 0 & \lambda r^2 + \mu(r^2 - x_0^2) \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz se anula si y solo si

$$(\lambda + \mu)\left((\lambda + \mu)(\lambda r^2 + \mu(r^2 - x_0^2)) - x_0^2 \mu^2\right) = 0$$

que equivale a

$$(\lambda + \mu)\left(\lambda^2 r^2 + \lambda\mu(2r^2 - x_0^2) + \mu^2 r^2\right) = 0$$

que equivale a

$$(\lambda+\mu)\left((\frac{\lambda}{\mu})^2r^2+\frac{\lambda}{\mu}(2r^2-x_0^2)+r^2\right)=0$$

pero la cuadrática en el paréntesis más grande no tiene raíces pues su discriminante es

$$(2r^2-x_0^2)^2-4r^2r^2=-4r^2x_0^2+x_0^4=(x_0^2-2x_0r)(x_0^2+2x_0r)<0$$

que es negativo pues ambos círculos se tocan y luego $x_0<2r$.

5. Tomamos gradiente a la ecuación que define de manera implícita el concoide de Nicomedes. El gradiente en cuestión tiene la siguiente forma

$$\nabla F(x,y)=(2x(x-b)^2+2(x^2+y^2)(x-b)-2a^2x, 2y(x-b)^2).$$

La segunda coordenada de este gradiente se anula si y solo si $y=0$ o $x=b$. Si $x=b$ la primera coordenada del gradiente se torna $2a^2b\neq 0$ por lo que los puntos singulares que buscamos deben ser tales que $y=0$. Reemplazando $y=0$ en la primer coordenada del gradiente e igualando a cero obtenemos

$$0=x(2(x-b)^2+2x(x-b)-2a^2)=x(4x^2-6bx+2(b^2-a^2))$$

Si $a=b$ como en el ítem a obtenemos que esta expresión se anula cuando $x=0$ o cuando $x=\frac{3}{2}b$. Si $(x,y)=(\frac{3}{2}b,0)$ obtenemos un punto que no verifica la ecuación de la curva y luego no pertenece al concoide de Nicomedes, mientras que si $(x,y)=(0,0)$ obtenemos el único punto singular en cuestión. En este caso la forma inicial del polinomio que define la curva es de grado 2 y consiste del polinomio homogéneo

$$F_2(x,y)=(x^2+y^2)a^2-a^2x^2=a^2y^2$$

por lo que el cono tangente es la recta doble $y=0$ y la singularidad es de multiplicidad 2 y cuspidal. Si $a=2, b=1$ como en el ítem b obtenemos que el gradiente se anula en los puntos donde $y=0$ y

$$0=x(2(x-1)^2+2x(x-1)-8)=x(4x^2-6x-6)$$

la única raíz de este polinomio que lleva a un punto que pertenece al concoide es $(x,y)=(0,0)$ y para dicho punto la forma inicial es de grado 2 y está dada por el polinomio

$$F_2(x,y)=(x^2+y^2)-4x^2=y^2-3x^2=(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x)$$

por lo que el cono tangente es el producto de dos rectas diferentes y la singularidad es de multiplicidad 2 y nodal.