

Práctica 7

Segunda forma fundamental y curvatura de Gauss

1. Describir las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss de las siguientes superficies:
 - (a) Paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$;
 - (b) Hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
 - (c) Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.
2. Encontrar expresiones para la primera y segunda forma fundamental, para la curvatura de Gauss y la media, y estudiar las direcciones principales en una superficie de revolución.
3. Probar que si una superficie S es tangente a un plano P a lo largo de una curva $C \subset S$, entonces los puntos de C son puntos planares o parabólicos de S .
4. Sean S una superficie con curvatura de Gauss $K > 0$ y $C \subset S$ una curva regular. Probar que la curvatura $\kappa(p)$ de C en p satisface

$$\kappa(p) \geq \min\{|k_1|, |k_2|\}$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de S en p .

5. Sea C una curva plana contenida en el plano xy , que no corta al eje y y tal que para todo punto $p \in C$, la recta tangente en P corta al eje y a distancia 1 de P .
 - (a) Determinar una ecuación para C . A esta curva se la llama tractriz (ver guía 4).
 - (b) Por rotación de C alrededor del eje y se obtiene una superficie S , llamada *pseudoesfera*. Determinar si S es una superficie regular y encontrar una parametrización en un entorno de cada punto regular. Mostrar que la curvatura de Gauss en todo tal punto es -1 .
6. Probar que las únicas superficies de revolución con curvatura constante nula son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.
7. Sea S una superficie regular. La *indicatriz de Dupin* de S en un punto p es el conjunto de vectores $w \in T_p S$ tales que $II_p(w) = \pm 1$. Probar que si p es un punto elíptico la indicatriz de Dupin en p es una elipse. ¿Qué ocurre si p es umbílico?

8. Determinar los puntos umbílicos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

9. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva contenida en el plano xz , que notamos por $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$. Sea S la superficie de revolución de α alrededor del eje z , y supongamos que S tiene curvatura Gaussiana constante k . Mostrar que entonces

$$\begin{aligned} x'' + kx &= 0, \\ z &= \int \sqrt{1 - x'^2} \, ds. \end{aligned}$$

Recíprocamente, mostrar que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe una superficie de revolución con curvatura de Gauss constante igual a k . ¿Qué dimensión tiene el espacio de soluciones de la primera ecuación diferencial?

10. Probar que todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están generadas por curvas de la forma

$$\begin{cases} x(t) = C \cos t, \\ z(t) = \int_0^t \sqrt{1 - C^2 \sin^2 u} \, du \end{cases}$$

para alguna constante C . Determinar el dominio de t y haga un gráfico de la curva cortada en el plano xz cuando $C = 1$, $C > 1$ o $C < 1$. Qué superficie obtenemos cuando $C = 1$?

11. Sean $\alpha, \omega : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas regulares en el espacio tales que $\|\omega\| \equiv 1$, ω' es nunca nula y la imagen de

$$\phi : (-1, 1) \times (-1, 1) \ni (t, v) \mapsto \alpha(t) + v\omega(t) \in \mathbb{R}^3$$

es una superficie regular S y, de hecho, ϕ es una parametrización regular.

- (a) Probar que existe una curva $\beta : (-1, 1) \rightarrow S$ tal que $\langle \beta', \omega' \rangle = 0$. Deducir que existe una función $\lambda : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$\beta \times \omega = \lambda \omega'$$

- (b) Calcular la curvatura gaussiana de S y probar que no es positiva.

12. Considere la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

- (a) Calcule los coeficientes de la primera forma.
 (b) Calcule los coeficientes de la segunda forma.
 (c) Calcule las curvaturas principales y la curvatura de Gauss.

- (d) Pruebe que las líneas de curvatura son curvas coordenadas.
 - (e) Pruebe que las líneas asintóticas son: $u + v = cte$ y $u - v = cte$.
13. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable, conexa, compacta y de curvatura gaussiana positiva en todo punto.
- (a) Probar que la aplicación de Gauss $N : M \rightarrow S^2$ es un difeomorfismo local y que es sobreyectiva.
 - (b) (para los que ya hicieron o están haciendo topología) Probar que N es un revestimiento de S^2 y concluir que es un difeomorfismo.

Geodésicas

14. Sean X e Y dos campos de vectores en una superficie S paralelos a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow S$. Probar que $\|X(\alpha(t))\|$, $\|Y(\alpha(t))\|$ y el ángulo formado por $X(\alpha(t))$ e $Y(\alpha(t))$ son constantes.
15. Sea $\mathfrak{X}_\alpha$ el conjunto de campos paralelos a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow S$. Probar que $\mathfrak{X}_\alpha$ es un espacio vectorial real de dimension 2.
16. Calcular los símbolos de Christoffel de la parametrización por coordenadas esféricas de S^2 y escribir la ecuación diferencial de sus geodésicas. Concluir que los meridianos son geodésicas.
17. El diámetro terrestre es 12516 km. Suponiendo que la tierra es una esfera calcular qué longitud tiene que tener un triángulo equilátero en la superficie terrestre para que su exceso angular sea de un grado.
18. Sea $\alpha \subset S$ una recta recorrida a velocidad constante. Probar que α es una geodésica.
19. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie simétrica respecto de un plano π . Probar que $S \cap \pi$ es una geodésica de S .
20. Sea $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ una curva parametrizada por longitud de arco con $x > 0$. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar α alrededor del eje z .
- (a) Probar que los meridianos de S son geodésicas.
 - (b) Dar una condición necesaria y suficiente para que un paralelo de S sea geodésica.
21. Probar que si todas las geodésicas de una superficie S son curvas planas, entonces S está contenida en un plano o en una esfera.
22. Sean S una superficie regular y $\phi : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow S$ una carta en la que $E = 1$ y $F = 0$. Probar que, para cada $v \in (-1, 1)$, la curva definida por $\alpha(t) = \phi(t, v)$ es una geodésica de S .
23. (Relación de Clairaut) Sea S una superficie de revolución suave y g una de sus geodésicas. Denotemos por $r(t)$ a la distancia entre $g(t)$ y el eje de rotación, y por $b(t)$ al ángulo entre la traza de g y el paralelo que pasa por $g(t)$. Demostrar que el producto $r(t)\cos(b(t))$ debe ser constante.

24. Sea S una superficie, $f : S \rightarrow S$ una isometría y supongamos que el conjunto de los puntos fijos de f dado por

$$F = \{x \in S : f(x) = x\}$$

define una subvariedad de dimensión 1. Sea γ una curva parametrizada por longitud de arco $\gamma : I \rightarrow F$ con I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Probar que γ es una geodésica de S .

25. (Teorema de Chasles) Consideremos el elipsoide

$$E = \left\{ \frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\alpha_2} + \frac{z^2}{\alpha_3} = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

que es una superficie regular. Por el ejercicio 24 (e) de la guía 3 una recta genérica $l \subseteq T_p E$ que sea tangente a E será tangente a otro elipsoide de la forma $E_\lambda = \left\{ \frac{x^2}{a_1 - \lambda} + \frac{y^2}{a_2 - \lambda} + \frac{z^2}{a_3 - \lambda} = 1 \right\}$ en un cierto punto q y los planos tangentes a dichos elipsoides $T_q E_\lambda$ y $T_p E$ son perpendiculares entre sí. Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E$ una geodésica de E con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = l$. Consideremos las funciones $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ y $q : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E_\lambda(t)$ que a cada valor t le asigna el número real $\lambda(t)$ tal que la recta tangente a $\gamma(t)$ en el punto $\gamma(t)$ es también tangente al elipsoide $E_{\lambda(t)}$ en el punto $q(t)$.

- (a) Sea $Z \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ el conjunto de puntos que se corresponden a los vectores tangentes $\gamma'(t)$ variando t . Probar que $T_{[\gamma'(t)]} Z$ es la recta proyectiva que corresponde al plano por el origen paralelo al plano osculador de γ en el punto $\gamma(t)$.
- (b) Probar que el plano osculador a $\gamma(t)$ es el plano $T_{q(t)} E_{\lambda(t)}$.
- (c) Fijemos $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Sea $\tilde{Z} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ el conjunto de puntos que se corresponden a rectas por el origen en $\mathbb{R}^3$ que son tangentes a $E_{\lambda(t)}$. Probar que

$$T_{[\gamma'(t)]} Z = \{\text{rectas por } \gamma(t) \text{ contenidas en } T_{q(t)} E_{\lambda(t)}\} \subseteq T_{[\gamma'(t)]} \tilde{Z}.$$

- (d) Concluir que la función λ es constante.