Geometría Proyectiva - Primer Parcial

Segundo cuatrimestre de 2025

Nombre y Apellido	L.U.	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración: 5 horas.

1. Sea ABC un triángulo acutángulo y D la intersección entre la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y el segmento $\overline{BC}$. La perpendicular a $\overline{AD}$ trazada por B corta a la circunferencia que pasa por A, B y D en B y E.
   a) Probar que $\angle EAB = \frac{\pi}{2} - \angle BCA$.
   b) Probar que A, E y el centro de la circunferencia que pasa por A, B y C están alineados.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo y D sobre el lado $\overline{AC}$. El punto I es tal que $\angle IAB = \angle IDB$. La circunferencia que pasa por los puntos C, D y I es tangente interiormente a la circunferencia que pasa por A, B y C en el punto C. Probar que

$$\frac{|CB| \cdot |CI|}{|CA| \cdot |CD|} = \frac{|BI|}{|AD|}.$$

   Sugerencia: invertir por una circunferencia con centro en el punto C *y probar que* $|\overline{B'I'}| = |\overline{A'D'}|$.

3. Se considera función $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ definida en coordenadas homogéneas por

$$f(x_0 : x_1) = (x_0^4 : x_0^3 x_1 : x_0^2 x_1^2 : x_0 x_1^3 : x_1^4)$$

   a) Probar que f está bien definida y que es inyectiva.
   b) Probar que no hay ninguna transformación proyectiva $F : \mathbb{P}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ que se restrinja a f sobre una recta de $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$.
   Sugerencia: calcular la intersección entre la imagen de f y un hiperplano de $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$.

4. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos que se intersecan en los puntos $A, B \in \mathbb{R}^2$. Consideramos la inclusión $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordenadas homogéneas $(Z_0 : Z_1 : Z_2)$ de modo que $\mathbb{R}^2$ se identifica con el plano afín dado por $\{Z_2 \neq 0\}$. A través de esta identificación $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ inducen dos cónicas proyectivas no degeneradas. Probar que hay una única cónica degenerada en el pincel que pasa por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ y que esa cónica consiste de la unión entre la recta del infinito y la recta AB.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ fijos y positivos. Para cada $t \in \mathbb{R}$ consideramos la recta $L_t = (x, tx)$ por el origen en $\mathbb{R}^2$ sea A_t el punto que se obtiene de intersecar dicha recta con la recta $x = b$ y luego se marcan los dos puntos sobre L que están a distancia a de A_t. El *concoide de Nicomedes* es la curva plana que está dada por los puntos marcados vía este proceso cuando variamos el valor de $t \in \mathbb{R}$. Con esta descripción puede hallarse una parametrización del concoide y luego eliminando el parámetro de dicha parametrización puede verse que el concoide está dado por la curva de ecuación implícita

$$(x^2 + y^2)(x - b)^2 - a^2 x^2 = 0.$$

   a) Supongamos que $a = b$. Probar que en este caso el concoide tiene una única singularidad en el punto $(0, 0)$ y que esta singularidad es de multiplicidad 2 y cuspidal.
   b) Probar que si $a = 2$ y $b = 1$ el punto $(0, 0)$ es una singularidad de multiplicidad 2 nodal.

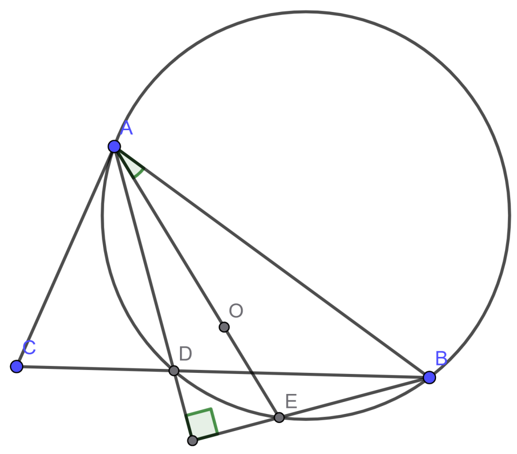

Figura 1: correspondiente al ejercicio 1. O es el circuncentro de ABC.

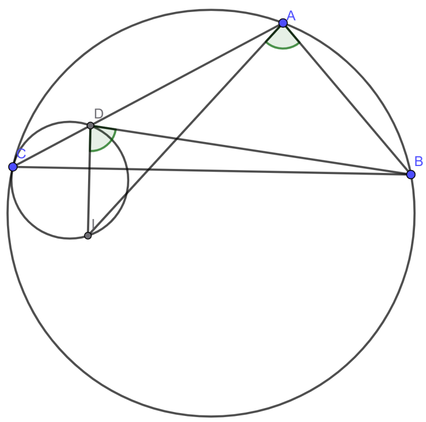

Figura 2: Correspondiente al ejercicio 2. Los ángulos marcados son iguales.

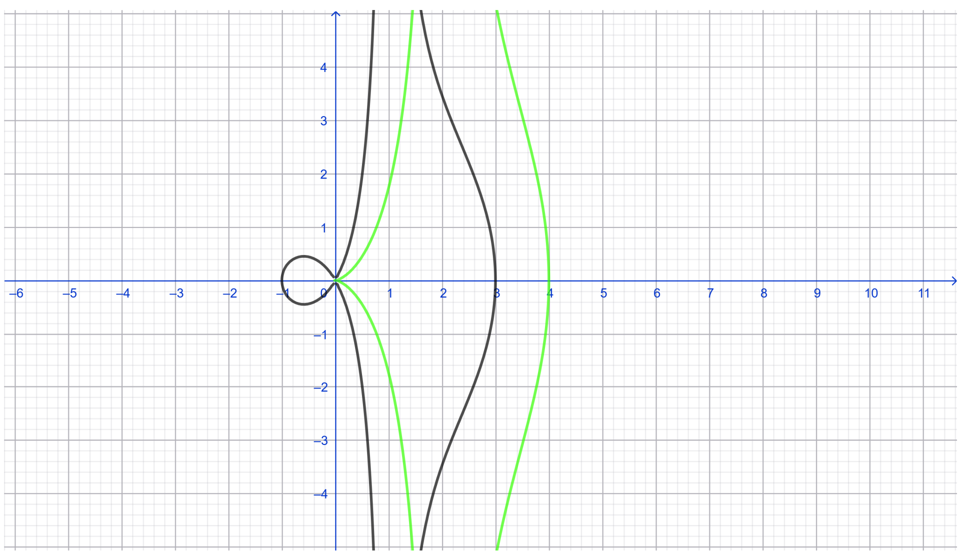

Figura 3: Correspondiente al ejercicio 5. Los concoides de parámetros a=2, b=1 y a a=b=1