Práctica 4

Algunos ejemplos de curvas planas

1. Un disco circular de radio 1 contenido en el plano xy rueda sobre el eje x sin deslizar. La figura descripta por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama *cicloide*.

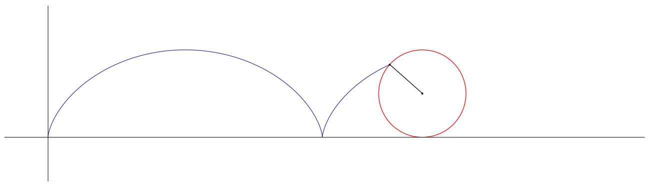

Figure 1: Cicloide

   (a) Obtener una parametrización del cicloide y determinar sus puntos singulares.

   (b) Calcular la longitud de arco del cicloide tras una rotación completa del disco.

2. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\theta/2))).$$

   La curva parametrizada por α es llamada *tractriz*.

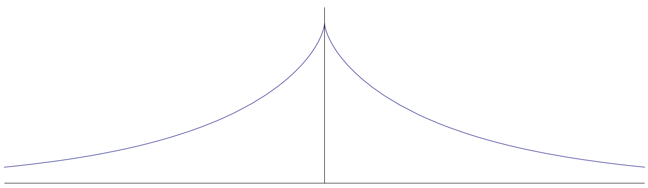

Figure 2: Tractriz (traspuesta)

   (a) Probar que la función α es diferenciable pero no regular.

   (b) Sea P un punto de la tractriz, L la recta tangente que pasa por P, y Q la intersección de L con el eje y. Probar que la distancia de P a Q es 1.

3. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right),$$

y sea $\mathcal{C}$ la curva que parametriza. Probar que:

(a) el origen pertenece a $\mathcal{C}$, y en ese punto su tangente es el eje x;

(b) se tiene que $\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = (0,0)$ y $\lim_{t \to +\infty} \alpha'(t) = (0,0)$;

(c) la recta $x + y + a = 0$ es una asíntota de $\mathcal{C}$.

La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta $y = x$ se llama *folio de Descartes*.

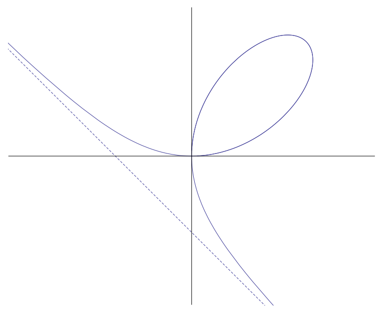

Figure 3: Folio de Descartes y su asíntota

4. Sean $b < 0 < a$, y consideremos la función $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t)).$$

La curva parametrizada por esta función se llama *espiral logarítmica*.

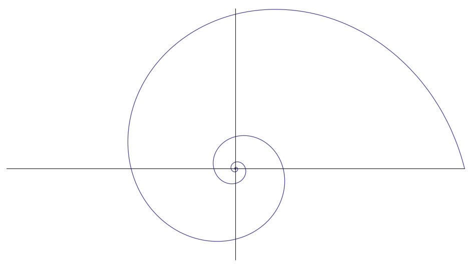

Figure 4: Espiral Logarítmica

(a) Probar que $\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = (0,0)$, y que cuando $t \to +\infty$ la curva sigue una trayectoria que envuelve al origen infinitas veces (sí, el enunciado es vago... parte del ejercicio es precisar esta noción de “envolver el origen”).

(b) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0,0)$ y $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau$ es finito. Concluir que la espiral logarítmica tiene longitud de arco finita.

5. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función

$$\alpha(t) = \left(\frac{(1+t^2)t}{1+t^4}, \frac{(1-t^2)t}{1+t^4} \right).$$

La curva parametrizada por α se llama *lemniscata*.

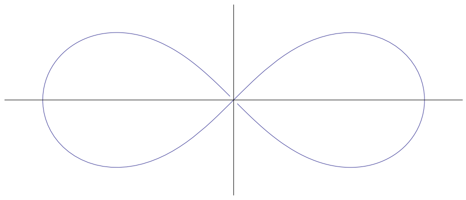

Figure 5: Lemniscata

(a) Probar que la función α es diferenciable, regular y simple.

(b) Determinar $\lim_{t\to-\infty} \alpha(t)$ y $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t)$ y concluir que α no es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y la lemniscata.

6. (Discriminante) Consideremos $\mathcal{E}$ el espacio de polinomios $P \in \mathbb{R}[X]$ de grado 3 y de la forma $P(x) = x^3 - 3ax + 2b$ para ciertos parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Dentro del plano $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^2$ dar una parametrización de la curva $\mathcal{C}$ definida por los polinomios P que tienen una raíz múltiple. Graficar $\mathcal{C}$. A qué polinomio se corresponde su punto singular?

Curvas planas implícitas

7. Encuentre los puntos singulares y las rectas tangentes en ellos de cada una de las siguientes curvas planas en k^n:

(a) $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY = 0$

(b) $X^4 + Y^4 - X^2Y^2 = 0$

(c) $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1 = 0$

(d) $Y^2 + (X^2 - 5)(4X^4 - 20X^2 + 25) = 0$

8. Probar que si una curva definida implícitamente por un polinomio de grado d en k^n tiene un punto p singular de multiplicidad d, la curva es la unión de d rectas que pasan por p (no necesariamente distintas).

9. Sea P un punto no-singular de la curva proyectiva $F(X,Y,Z) = 0$ en $\mathbb{P}^2(k)$, donde F es un polinomio homogéneo. Probar que la recta tangente a F en P es $F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z = 0$.

10. Buscar los puntos singulares, las multiplicidades y las tangentes en los puntos singulares de las siguientes curvas en $\mathbb{P}^2(k)$.

(a) $XY^4 + YZ^4 + XZ^4 = 0$

(b) $X^2Y^3 + X^2Z^3 + Y^2Z^3 = 0$

(c) $Y^2Z - X(X-Z)(Z-\lambda Z) = 0$, $\lambda \in k$

11. Probar que si $\alpha \neq 2, 3, 6$ entonces la curva plana proyectiva

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x + \alpha xyz = 0$$

es no singular.

Curvas planas paramétricas

12. Calcular la curvatura de un círculo de radio r.

13. Sea $\mathcal{C}$ una curva que no pasa por el origen y sea P el punto de $\mathcal{C}$ más próximo al origen. Probar que la tangente a $\mathcal{C}$ en P es ortogonal al vector P.

14. Probar que si todas las normales a una curva pasan por un punto fijo entonces la curva está contenida en un círculo.

15. Sea $\mathcal{C}$ una curva y sea α una parametrización cualquiera (no necesariamente por longitud de arco). Demostrar que la curvatura con signo de $\mathcal{C}$ está dada por

$$\widetilde{k} = \frac{\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_2'\alpha_1''}{[(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2]^{3/2}}.$$

16. Sea $\widetilde{k} : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Fijemos $s_0 \in I$ y definamos una nueva función $\theta : I \to \mathbb{R}$ como $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \widetilde{k}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ para cada $s \in I$. Probar que la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, donde

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right)$$

tiene curvatura con signo $\widetilde{k}$, y que cualquier otra curva cuya curvatura con signo esté dada por $\widetilde{k}$ es congruente a $\mathcal{C}$ (es decir, se obtiene aplicando una transformación lineal ortogonal que preserva orientación y una traslación a $\mathcal{C}$).

17. Mostrar que la curva $\mathcal{C}$ y su círculo osculador en el punto P se cortan en P, y en ese punto tienen la misma tangente y la misma curvatura.

18. Determinar los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

19. La *evoluta* de $\mathcal{C}$, que notamos $e(\mathcal{C})$, es la curva formada por los centros de curvatura de $\mathcal{C}$; la función $x(s)$ es una parametrización de $e(\mathcal{C})$.

(a) Probar que la tangente a $e(\mathcal{C})$ en $Q = x(s)$ es paralela a la normal a $\mathcal{C}$ en $P = \alpha(s)$. Concluir que la evoluta de $\mathcal{C}$ es una envolvente de las rectas normales de $\mathcal{C}$.

(b) Supongamos que la curvatura de $\mathcal{C}$ es monótona. Probar que la longitud de arco de $e(\mathcal{C})$ entre dos puntos Q y Q' es la diferencia de los radios de curvatura en los correspondientes puntos P y P' de $\mathcal{C}$.

20. Probar que los puntos singulares de la evoluta de $\mathcal{C}$ son los puntos de $\mathcal{C}$ donde la curvatura tiene un punto crítico. Estos puntos se llaman vértices de $\mathcal{C}$.

21. Hallar una envolvente para las siguientes familias de curvas.

    (a) La familia de círculos definida por $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1$.

    (b) La familia de rectas definida por $F(x, y, t) = y - 2tx - t^2$.

22. Sean X_1 y X_2 dos puntos en $\mathbb{R}^2$ que se mueven a velocidades proporcionales por el eje x y el eje y respectivamente. Hallar la envolvente de la familia de rectas $\overline{X_1X_2}$.