

ÁLGEBRA LINEAL - Práctica N°8 - Segundo Cuatrimestre de 2023

Espacios vectoriales con producto interno

En esta práctica, todos los espacios vectoriales serán sobre \mathbb{R} o sobre \mathbb{C} únicamente.

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre V . Probar:

- i) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- ii) $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \cdot \langle x, y \rangle$
- iii) $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle \forall x \in V \Rightarrow y = z$

Ejercicio 2. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 3. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

- i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
- ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$
- iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
- iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_2.\bar{y}_2 - x_1.\bar{y}_2 - x_2.\bar{y}_1$
- v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + (1+i).x_1.\bar{y}_2 + (1+i).x_2.\bar{y}_1 + 3.x_2.\bar{y}_2$
- vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1.\bar{y}_1 - i.x_1.\bar{y}_2 + i.x_2.\bar{y}_1 + 2.x_2.\bar{y}_2$
- vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_3.\bar{y}_3 - x_1.\bar{y}_3 - x_3.\bar{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R}

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1+b).x_3.y_3$$

es un producto interno en \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

- i) $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
- ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x).g(x) dx$
- iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K$, $\langle x, y \rangle = \bar{y} \cdot Q^* \cdot Q \cdot x^t$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde $Q \in K^{n \times n}$ es una matriz inversible.
- iv) $\langle \cdot, \cdot \rangle_T : V \times V \rightarrow K$, $\langle x, y \rangle_T = \langle T(x), T(y) \rangle$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde V y W son espacios vectoriales sobre K , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \rightarrow W$ es un monomorfismo.

Ejercicio 6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 7.

- i) Encontrar una base de \mathbb{R}^2 que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 3. iii) con $K = \mathbb{R}$.
- ii) Encontrar una base de \mathbb{C}^2 que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 3. vi).

Ejercicio 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V .

- i) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.
- ii) Hallarlo en los casos
 - a) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
 - b) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

Ejercicio 9. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V :

- i) $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$ para el producto interno canónico.
- ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$ para el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1.$$
- iii) $V = \mathbb{C}^3$, $S_3 = \langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle$ para el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ definido en el Ejercicio 5. iv) con $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} \cdot x^t \quad \text{y } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ el producto interno canónico sobre } \mathbb{C}^3.$$
- iv) $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2i \cdot x_2 - x_3 + (1+i) \cdot x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i) \cdot x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ para el producto interno $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot \bar{y}_1 + 2 \cdot x_2 \cdot \bar{y}_2 + x_3 \cdot \bar{y}_3 + 3 \cdot x_4 \cdot \bar{y}_4$.

Ejercicio 10.

- i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para los productos internos considerados.
- ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.
- iii) Hallar el punto de S_4 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

Ejercicio 11. Se define $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ como $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot g\left(\frac{k}{n}\right)$.

- i) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno.
- ii) Para $n = 2$, calcular $\langle X \rangle^\perp$.

Ejercicio 12.

- i) Se considera $\mathbb{C}^{n \times n}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
- ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.
- iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \sin(\pi x)$.
- Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \sin(\pi x) \rangle$.

Ejercicio 13. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de V . Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^\perp$ y $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Ejercicio 14. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

- i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3 \cdot x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
- ii) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2 \cdot x_1 + (1 - i) \cdot x_2, x_2 + (3 + 2i) \cdot x_3, x_1 + i \cdot x_2 + x_3)$
- iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(p) = p'$, donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$.
- v) $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $f(A) = P^{-1} \cdot A \cdot P$, donde $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$.
- vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = f \cdot p$, donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$.

Ejercicio 15. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean f_1 y f_2 endomorfismos de V y sea k un escalar. Probar:

- i) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
- ii) $(k \cdot f_1)^* = \bar{k} \cdot f_1^*$
- iii) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$
- iv) Si f_1 es un isomorfismo, entonces f_1^* es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$
- v) $((f_1)^*)^* = f_1$
- vi) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

Ejercicio 16. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$ y $\text{Nu}(f^*) = (\text{Im}(f))^\perp$.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f sea autoadjunta para $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ejercicio 18. Sea (V, \langle, \rangle) un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de V . Probar que la proyección ortogonal $P : V \rightarrow V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 19.

- i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

- ii) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20. Sea (V, \langle, \rangle) un \mathbb{C} -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

- i) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.
- ii) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:
- $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall v \in V$. En particular, $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(f^*)$.
 - $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda \cdot \text{id}_V$ es normal.
 - Si v es un autovector de f de autovalor λ , entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\bar{\lambda}$.
 - $E_\lambda = \{v \in V / f(v) = \lambda \cdot v\}$ es f^* -invariante.
- iii) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.
(Sugerencia: observar que $(E_\lambda)^\perp$ es f -invariante y f^* -invariante).
- iv) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre \mathbb{C} . Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre \mathbb{R} .

Ejercicio 21. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle (1, 0, 1) \rangle$.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

- i) Probar que f es una rotación.
- ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 24. Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

- i) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.
- ii) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 25. *Cálculo de volúmenes.* Consideremos \mathbb{R}^n con el producto interno canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en \mathbb{R}^n se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea, $\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\|$.

El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en \mathbb{R}^n sería “área de la base por altura”, o sea, $\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\|$.

Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n , el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería $\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\| \cdots \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|$.

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que *el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes v_1, \dots, v_n en \mathbb{R}^n es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n .*

- i) Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ como $G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Probar:
 - a) Si $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$.
 - b) Si $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|v_k\|^2$.
 - c) $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|^2$.
- ii) Probar que, si v_1, \dots, v_k son vectores linealmente independientes, $(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k))$.
- iii) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n . Probar que $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$. Deducir que $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.
- iv) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en \mathbb{R}^2 . Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en \mathbb{R}^3 .
- v) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, probar que $\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f| \cdot \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n))$.