

**ALGEBRA LINEAL - Práctica N°6 - Segundo cuatrimestre de 2023****Autovalores y autovectores - Diagonalización**

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz  $A$  en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} & \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \\ \\ \text{iv) } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} & \text{v) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Ejercicio 2.** Para cada una de las matrices  $A$  del ejercicio anterior, sea  $U$  una base de  $K^n$  y sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  la transformación lineal tal que  $|f|_U = A$ . Decidir si es posible encontrar una base  $B$  de  $K^n$  tal que  $|f|_B$  sea diagonal. En caso afirmativo, calcular  $C(B, U)$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de  $\delta$  y exhibir un autovector correspondiente.

**Ejercicio 4.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z).$$

i) Encontrar una base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $|f|_B$  sea diagonal.

ii) Calcular  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

iii) Hallar, si es posible, una matriz  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 5.** Diagonalizar las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 6.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

- i) Probar que  $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $F_i$  es el  $i$ -ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  y  $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ ).
- ii) Encontrar una matriz  $P \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $PAP^{-1}$  es diagonal.
- iii) Hallar la fórmula general para el término  $F_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- iv) Se define una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Ejercicio 7.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 3$ ,  $y(0) = -1$ .

Sugerencia: Hallar una matriz  $C \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$  es diagonal y hacer el cambio de variables  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $A \in K^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

**Ejercicio 9.**

- i) Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  diagonalizable con  $\text{tr}(A) = -4$ . Calcular los autovalores de  $A$  sabiendo que los autovalores de  $A^2 + 2A$  son  $-1$ ,  $3$  y  $8$ .
- ii) Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  tal que  $\det(A) = 6$ ;  $1$  y  $-2$  son autovalores de  $A$  y  $-4$  es autovalor de la matriz  $A - 3I_4$ . Hallar los restantes autovalores de  $A$ .

**Ejercicio 10.**

- i) Sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  un proyector con  $\dim(\text{Im}(f)) = s$ . Calcular  $\mathcal{X}_f$ . ¿Es  $f$  diagonalizable?
- ii) Sea  $K$  un cuerpo incluido en  $\mathbb{C}$  y  $f : K^n \rightarrow K^n$  un endomorfismo nilpotente. Calcular  $\mathcal{X}_f$ . ¿Es  $f$  diagonalizable?

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz que satisface  $A^2 + I_n = 0$ . Probar que  $A$  es inversible, que no tiene autovalores reales y que  $n$  debe ser par.

**Ejercicio 12.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal tal que  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ . Probar que  $f$  es diagonalizable si y sólo si  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  una transformación lineal. Probar que existe una base  $B$  de  $\mathbb{C}^n$  tal que  $|f|_B$  es triangular superior.

**Ejercicio 14.** Sean  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{n \times m}$ .

i) Probar que las matrices  $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$  de  $K^{(m+n) \times (m+n)}$  son semejantes.

ii) Deducir que si  $n = m$ , entonces  $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$ .

**Ejercicio 15.** Dadas las matrices  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  y los polinomios  $P \in \mathbb{C}[X]$ , calcular  $P(A)$  para:

i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , a)  $P = X - 1$ , b)  $P = X^2 - 1$ , c)  $P = (X - 1)^2$ .

ii)  $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ,  $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$ .

**Ejercicio 16.** Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el polinomio característico):

i)  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

iv)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

v)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

vi)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

vii)  $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

viii)  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

ix)  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

**Ejercicio 17.** Sea  $A \in K^{n \times n}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

**Ejercicio 18.** Calcular el polinomio minimal de cada una de las siguientes transformaciones lineales:

i)  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ ,  $f(P) = P' + 2P$ .

ii)  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f(A) = A^t$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $\delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  la transformación lineal derivada. Probar que  $\delta$  no admite ningún polinomio minimal.

**Ejercicio 20.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que el polinomio minimal de  $A$  como matriz real y el polinomio minimal de  $A$  como matriz compleja coinciden.

**Ejercicio 21.** Sea  $A \in K^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  tienen el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal.

**Ejercicio 22.** Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular  $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$  para  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

ii) Calcular  $A^{1000}$  para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

iii) Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ , expresar a  $A^{-1}$  como combinación lineal de  $A$  y de  $I_2$ .

iv) Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , expresar a  $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37I_2)^{-1}$  como combinación lineal de  $A$  y de  $I_2$ .

v) Calcular  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

vi) Calcular  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 23.** Exhibir una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $A^2 + I_n = 0$ . Comparar con el Ejercicio 11.

---