

**ALGEBRA LINEAL - Práctica N°4 - Segundo cuatrimestre de 2023****Espacio Dual**

**Ejercicio 1.** Hallar una base del subespacio  $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* : \varphi(1, -1, 2) = 0\}$ .

**Ejercicio 2.** En cada uno de los siguientes casos, hallar la base dual de la base  $B$  del  $K$ -espacio vectorial  $V$ :

i)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(1, -1), (2, 0)\}$ ,

ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,

iii)  $V = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3X + 2, X^3 - 3X^2 + 2X\}$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  la base de  $(\mathbb{R}^3)^*$  definida por

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2, \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3.$$

Hallar la base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $B' = B^*$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $f_1, f_2$  y  $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$  las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx, \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx.$$

i) Probar que  $\{f_1, f_2, f_3\}$  es una base de  $(\mathbb{R}_2[X])^*$ .

ii) Hallar una base  $B$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  tal que  $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ .

i) Si  $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* \setminus \{0\}$ , demostrar que  $\text{Nu}(\varphi_1) = \text{Nu}(\varphi_2)$  si y solo si  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  es linealmente dependiente.

ii) Sean  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r$  formas lineales en  $V^*$  tales que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

Probar que  $\varphi \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_r \rangle$ .

iii) Sean  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  formas lineales en  $V^*$ . Probar que

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^n \text{Nu}(\varphi_i) = 0.$$

**Ejercicio 6.** Sea  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$  y sea  $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$  la base dual de la canónica.

i) Calcular las coordenadas de  $\varphi$  en  $E^*$ .

ii) Calcular las coordenadas de  $\varphi$  en la base  $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$ .

iii) Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  el subespacio  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$  y sea  $B \subset \mathbb{R}^3$  la base  $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$ . Encontrar una ecuación para  $S$  en la base  $B$ .

(Sugerencia: notar que  $B^*$  es la base dual de  $B$  y no hacer ninguna cuenta.)

**Ejercicio 7.** Sea  $B \subset \mathbb{R}^2$  la base  $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ . Encontrar las coordenadas de la base dual de  $B$  en la base dual de la canónica.

**Ejercicio 8.** Sean  $B$  y  $B_1$  las bases de  $\mathbb{R}^3$  definidas por  $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  y  $B_1 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$ . Si  $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$  tiene coordenadas  $(1, -3, 2)$  respecto de  $B^*$ , calcular sus coordenadas respecto de  $B_1^*$ .

**Ejercicio 9.** Hallar una base de  $S^\circ \subseteq V^*$  en los siguientes casos:

- i)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$ .
- ii)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$ .
- iii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \cdot B = 0\}$ . Sea  $f \in W^\circ$  tal que  $f(I_2) = 0$  y  $f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ . Calcular  $f(B)$ .

**Ejercicio 11.** Para los siguientes subespacios  $S$  y  $T$  de  $V$ , determinar una base de  $(S + T)^\circ$  y una base de  $(S \cap T)^\circ$ .

- i)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$ ,  $T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$ .
- ii)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y  $S$  y  $T$  subespacios tales que  $V = S \oplus T$ . Probar que  $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$  la forma lineal traza. Dado  $a \in K^{n \times n}$ , se define  $f_a : K^{n \times n} \rightarrow K$  como  $f_a(x) = tr(a \cdot x)$ .

- i) Probar que  $f_a \in (K^{n \times n})^*$  para cada  $a \in K^{n \times n}$ .
- ii) Probar que si  $f_a(x) = 0$  para cada  $x \in K^{n \times n}$ , entonces  $a = 0$ .
- iii) Se define  $\gamma : K^{n \times n} \rightarrow (K^{n \times n})^*$  por  $\gamma(a) = f_a$ . Probar que  $\gamma$  es un isomorfismo.
- iv) Sea  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}.$$

Encontrar una matriz  $a \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\gamma(a) = f$ .

**Ejercicio 14.** Sea  $\varphi \in (K^{n \times n})^*$  tal que  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(b \cdot a)$  para cada  $a, b \in K^{n \times n}$ . Probar que existe  $\alpha \in K$  tal que  $\varphi = \alpha tr$ . Deducir que si  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(b \cdot a)$  para cada  $a, b \in K^{n \times n}$  y  $\varphi(I_n) = n$ , entonces  $\varphi = tr$ .

**Ejercicio 15.** Sean  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$  tales que  $\alpha_i \neq \alpha_j$  si  $i \neq j$ . Para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , se define  $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \rightarrow K$  como  $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$ .

- i) Probar que  $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$  es una base de  $(K_n[X])^*$ .
- ii) Sea  $B = \{P_0, \dots, P_n\}$  la base de  $K_n[X]$  tal que  $B^* = B_1$ . Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^n \beta_i P_i$$

es el único polinomio en  $K[X]$  de grado menor o igual que  $n$  tal que  $P(\alpha_i) = \beta_i$  para  $0 \leq i \leq n$ . Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange*.

- iii) Probar que existen números reales  $a_0, \dots, a_n$  tales que, para todo  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i P(\alpha_i).$$

Hallar  $a_0, a_1$  y  $a_2$  en el caso en que  $n = 2$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  y  $\alpha_2 = 0$ .

**Ejercicio 16.** Sean  $V$  y  $W$   $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Se define la función  $f^t : W^* \rightarrow V^*$  de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f.$$

$f^t$  se llama la función *transpuesta* de  $f$ .

- i) Probar que  $f^t$  es una transformación lineal.
- ii) Probar que  $(\text{Im}(f))^\circ = \text{Nu}(f^t)$  y que  $\text{Im}(f^t) = (\text{Nu}(f))^\circ$ .
- iii) Sean  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $W = \mathbb{R}^3$  y  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$ .  
Si  $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$  y  $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ , calcular  $|f|_{BB_1}$  y  $|f^t|_{B_1^*B^*}$ .
- iv) Si  $B$  y  $B_1$  son bases de  $V$  y  $W$  respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^*B^*} = (|f|_{BB_1})^t.$$


---