Práctica 8

Ejercicio 1. Sean E y F espacios de Banach y sea $A \subset E$ un abierto no vacío. Sea $f : A \longrightarrow F$ una función continua y sea $x_0 \in A$.

i) Probar que si una transformación lineal $T : E \longrightarrow F$ satisface

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

entonces T es continua.

ii) Probar que si T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de E en F que satisfacen la condición de i), entonces $T_1 = T_2$.

Ejercicio 2. Sean E y F espacios de Banach, sea $A \subset E$ abierto no vacío y sea $f : A \longrightarrow F$. Probar que f es diferenciable en $x_0 \in A$ si y sólo si existen $T \in L(E, F)$ y $r : A \longrightarrow F$ con $r(x_0) = 0$ y r continua en x_0, tales que para todo $x \in A$

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x).$$

Ejercicio 3. Sean E y F espacios de Banach, sea $A \subset E$ abierto no vacío y sea $f : A \longrightarrow F$. Probar que si f es diferenciable en $x_0 \in A$, existen $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B(x_0, \delta) \subset A$ y $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$ para todo $x \in B(x_0, \delta)$.

Ejercicio 4. Sea f una función a valores reales diferenciable definida en un subconjunto abierto A de un espacio de Banach E. Probar que si f alcanza un extremo relativo en un punto $x_0 \in A$, entonces $Df(x_0) = 0$.

Ejercicio 5. Sea E un espacio de Banach. Sean $x_1, x_2 \in E$ y sea $A \subset E$ un abierto que contiene al segmento que une x_1 y x_2.

i) Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que existe x en el segmento que une x_1 y x_2 tal que $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$.

ii) Mostrar con un ejemplo que el resultado no vale para funciones vectoriales.

iii) Sea F un espacio de Banach y sea $f : A \longrightarrow F$ una función diferenciable que verifica $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$. Probar que $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

Ejercicio 6. Sean E y F espacios de Banach. Sea $A \subset E$ un abierto conexo y sea $f : A \longrightarrow F$ una función diferenciable. Probar que si $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A.

Ejercicio 7. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación que satisface $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$ para todo par de puntos $x, y \in U$. Probar que f es constante.

Ejercicio 8. Sean E y F espacios de Banach. Sea $f : E \longrightarrow F$ diferenciable en $x_0 \in E$. Probar que para cada $v \in E$ existe la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ y vale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Df(x_0)(v)$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

i) Verificar que f no es inyectiva.

ii) Comprobar que el jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Deducir que f es localmente inyectiva.

Ejercicio 10. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con jacobiano no nulo en todo $x \in U$.

i) Probar que f es abierta.

ii) Probar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto discreto.