Práctica 7

Ejercicio 1. Probar que cada uno de los siguientes es un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, y decidir si es un espacio de Banach.

i) $\ell^1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, con $\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

ii) ℓ^1 con $\|(x_n)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

iii) $C[a,b]$ con $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

iv) $C^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f$ es de clase $C^1\}$ con $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado (sobre $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Probar que se verifican:

i) La función "tomar norma" $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es continua.

ii) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : k \times E \to E$ son funciones continuas.

iii) $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

iv) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$.

Ejercicio 3. Sea E un k-espacio vectorial ($k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una métrica que satisface:

i) $d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad \forall\, x,y,z \in E$

ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y) \qquad \forall\, x,y \in E \ \ \forall\, \lambda \in k$

Se define $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ como $N(x) = d(0,x)$. Probar que N es una norma en E y verificar que la distancia inducida por N es d.

Ejercicio 4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si para todos $x, y \in C$ y $t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

i) Probar que la bola abierta $B(x,r)$ es convexa.

ii) Probar que si C es convexo, entonces C° y $\overline{C}$ también lo son.

iii) Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos convexos de E, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo. Deducir que dado un subconjunto $A \subset E$, existe un único conjunto convexo minimal (respecto de la inclusión) que lo contiene. Este conjunto se llama la *cápsula convexa* de A, y lo notamos $Conv(A)$.

iv) Probar que si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un subconjunto finito de E, entonces $Conv(A) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ / \ a_i \geq 0$ para todo i, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$.

Ejercicio 5. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

i) $\overline{S}$ también es un subespacio.

ii) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

Ejercicio 6. Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $\ell^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, se define $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

i) Probar que $(\ell^p, \| \ \|_p)$ es un espacio de Banach separable.

ii) Probar que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es un subespacio no cerrado de ℓ^p para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 7. Sean c y c_0 los espacios de sucesiones de números reales convergentes y convergentes a 0 respectivamente.

i) Determinar si $(c, \| \ \|_\infty)$ y $(c_0, \| \ \|_\infty)$ son espacios de Banach y si son separables.

ii) Probar que para $1 \leq p < q < \infty$ se tiene que $\ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ y verificar que las inclusiones son estrictas.

Ejercicio 8. Sea E un espacio normado.

i) Probar que si $\lambda \neq 0$ y $x_0 \in E$, $f : E \longrightarrow E$, $f(x) = \lambda x + x_0$ es un homeomorfismo uniforme.

ii) Deducir que:

(a) Si $U \subset E$ es abierto (respectivamente cerrado) en E, entonces, para cada $x \in E$, el conjunto $U + x$ es abierto (respectivamente cerrado) en E.

(b) Si $U \subset E$ es abierto y $B \subset E$ un conjunto arbitrario, entonces $U + B$ es abierto en E. ¿Vale el mismo resultado reemplazando abierto por cerrado?

Ejercicio 9. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 10. Dado un k-espacio vectorial E, un subespacio (vectorial) $H \subset E$ se dice un *hiperplano* si existe $x \in E$, $x \neq 0$, tal que $H \oplus \langle x \rangle = E$.

i) Probar que si H es un hiperplano, entonces para todo $y \in E \setminus H$ se tiene que $H \oplus \langle y \rangle = E$.

ii) Probar que H es un hiperplano si y sólo si existe $\phi : E \to k$ lineal, $\phi \neq 0$, tal que $H = \ker(\phi)$.

iii) Probar que si E es un espacio normado y H es un hiperplano, entonces H es o bien cerrado o bien denso en E.

Ejercicio 11. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

i) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \subset \ell^\infty$.

ii) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$.

iii) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\} \subset \ell^1$.

Ejercicio 12. Sean E y F espacios normados, y sea $T : E \to F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

(1) T es continuo en 0;

(2) $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0;

(3) T es continuo;

(4) T es uniformemente continuo;

(5) $\exists M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$ (T es *acotado*);

(6) $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 13. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos $L(E,F) := \{T : E \to F \ / \ T \text{ es lineal y continua}\}$, y para cada $T \in L(E,F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

i) $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

ii) Si F es de Banach entonces $L(E,F)$ también lo es.

Ejercicio 14. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M > 0 \ / \ \|Tx\| \leq M\|x\| \ \text{ para todo } x\}.$$

Ejercicio 15. Sean E_1, E_2 y E_3 espacios normados, y sean $f : E_1 \longrightarrow E_2$ y $g : E_2 \longrightarrow E_3$ operadores lineales continuos. Probar que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Ejercicio 16. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy.$$

Probar que K es lineal y continua. Encontrar una cota para su norma.

Ejercicio 17. En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\geq 1} / \ \exists n_0, \ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f((a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n,$$

está bien definida y es lineal pero no es continua.

Ejercicio 18. Sea $(\mathbb{R}[X], \| \ \|)$ el espacio normado formado por todos los polinomios con coeficientes reales con la norma $\|P\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Sea $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(P) = P(3)$. Probar que φ es lineal pero no continua.

Ejercicio 19. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio normado formado por las funciones continuas con soporte compacto con la norma $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Definimos $\varphi : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \ dt$. Estudiar la continuidad de φ.

Ejercicio 20. Sean $S, T : \ell^1 \to \ell^1$, definidos por:

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

Probar que $S, T \in L(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 21. Sea $T : c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$. (Recordar: c es el conjunto de las sucesiones en $\mathbb{R}$ convergentes).

Ejercicio 22. Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

Sugerencia: para el cálculo de la norma, hacerlo primero suponiendo que ϕ tiene finitos ceros en el intervalo $[0,1]$. Para extenderlo al caso general, usar el teorema de Stone-Weierstrass.

Ejercicio 23. Sean E un espacio normado y F un espacio de Banach. Sea D un subespacio (vectorial) denso de E. Probar que dado un operador lineal y continuo $T : D \longrightarrow F$, existe un único operador lineal y continuo $\widetilde{T} : E \longrightarrow F$ tal que $\widetilde{T}_{|_D} \equiv T$, y además este operador satisface $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Ejercicio 24. Sea E un espacio normado sobre k ($k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea $\phi : E \to k$ un funcional lineal. Probar que ϕ es continuo si y sólo si $\ker(\phi)$ es cerrado.

Ejercicio 25.

i) Sea E un espacio normado y sea H el hiperplano cerrado de E de ecuación $\varphi(x) = 0$, donde φ es un funcional lineal continuo. Probar que para cada $a \in E$, se tiene que $d(a, H) = \dfrac{|\varphi(a)|}{\|\varphi\|}$.

ii) En el espacio $(c_0, \| \, \|_\infty)$, sea H el hiperplano de ecuación $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0$.

   (a) Verificar que H es cerrado.

   (b) Probar que si $a \notin H$, no existe ningún punto $b \in H$ tal que $d(a, H) = d(a, b)$.

Ejercicio 26. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Asumiendo la existencia de una base de E como espacio vectorial, definir una función lineal $\phi : E \to k$ que no sea continua. Deducir que todo espacio normado de dimensión infinita contiene un subespacio (vectorial) propio denso.

Ejercicio 27. Sea E un espacio normado de dimensión n sobre $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorfismo algebraico (es decir, una transformación lineal biyectiva). Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

i) Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$.

ii) Probar que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1\|x\|_\infty \le \|f(x)\|_E \le c_2\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

iii) Probar que si N_1, N_2 son dos normas en E, entonces son equivalentes: esto es, existen constantes $a, b > 0$ tales que $a \cdot N_1(x) \le N_2(x) \le b \cdot N_1(x)$ para todo $x \in E$.

iv) Probar que cualquier norma que se defina sobre E lo convierte en un espacio de Banach.

Ejercicio 28. Sea E un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio vectorial de dimensión finita. Probar que S es cerrado en E.

Ejercicio 29. Sean E y F espacios normados con $\dim F < \infty$, y sea $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal. Probar que T es continuo si y sólo si $\ker(T)$ es cerrado.

Ejercicio 30. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.
Sugerencia: Usar el teorema de Baire.

Ejercicio 31. Sea $(E, \| \, \|)$ un espacio normado. Sea S un subespacio propio de E de dimensión finita y sea $v_0 \in E - S$. Probar que existe $v \in S$ tal que $d(v_0, S) = \|v - v_0\|$.

Ejercicio 32. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$.
Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha$ para todo $s \in S$.
Sugerencia: considerar $x \notin S$, $r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Ejercicio 33. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|v_n\| = 1$ y $d(v_n, v_m) > 1/2$, $n \neq m$. Deducir que $\overline{B}(0,1)$ no es compacta.
Sugerencia: aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

Ejercicio 34. (Principio de acotación uniforme) Sean E un espacio de Banach y F un espacio normado. Sea $(T_j)_{j\in J} \subset L(E,F)$ una familia que satisface:

$$\sup_{j\in J} \|T_j(x)\| < \infty \qquad \text{para cada } x \in E.$$

Probar que $\sup_{j\in J} \|T_j\| < \infty$.