

Práctica 6: Espacios de funciones

- 1** (a) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado:
- i) $f_n(x) = x^n \quad A = (-1, 1]$
- ii) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n} \quad A = (1, +\infty)$
- iii) $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n \quad A = [0, 1]$
- (b) Demostrar que la sucesión de (a) converge uniformemente en $B = (0, \frac{1}{2})$. ¿Es uniforme la convergencia en $(-1, 1]$?
- (c) Demostrar que la sucesión de (b) converge uniformemente en $B = [2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia en $(1, 2)$? ¿Y en $(2, +\infty)$?
- (d) Demostrar que para la sucesión de (c) existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ pero el mismo no coincide con la integral del límite puntual (es decir, el límite no puede “pasar adentro de la integral”).
- 2** Sean X un espacio métrico y A un conjunto. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de A en X y sea $f : A \rightarrow X$. Probar que: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a f sobre A si y solamente si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- 3** Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:
- (a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, x \in \mathbb{R}.$
- (b) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), x \in \mathbb{R}.$
- (c) $f_n(z) = \frac{n}{n+1}z, z \in \mathbb{C}.$
- (d) $f_n(z) = nz^2, z \in \mathbb{C}.$
- (e) $f_n(z) = z^n, \text{ en } \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$
- 4** Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+nx^2}$ converge puntualmente pero no uniformemente, en \mathbb{R} , a una función continua.
- 5** Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ es acotada}\}$. Consideremos una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(X)$.
- (a) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en X , ¿es cierto que $f \in B(X)$?
- (b) Probar que:
- Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f en X , entonces $f \in B(X)$.
 - $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.
 - Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en X , entonces $\exists M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.
- 6** Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones de clase C^1 tal que:
- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre \mathbb{R} a una función g ,
 - existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $y_0 \in \mathbb{R}$.

Probar que existe una función f tal que f_n converge puntualmente a f en \mathbb{R} , f es derivable y $f' = g$.

7 Hallar una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , todas ellas derivables, que converge uniformemente a una función no derivable.

8 Sea X un espacio métrico, sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en \mathbb{R} y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

(a) Probar que si f_n converge uniformemente a f , entonces para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

(b) Probar que si X es compacto vale la vuelta, es decir: si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$, entonces f_n converge uniformemente a f .

9 Sea X un conjunto y sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de X en \mathbb{R} que convergen uniformemente sobre X .

(a) Probar que $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre X .

(b) Probar que si las f_n y las g_n son acotadas, entonces $(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre X .

(c) Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se permite que las g_n no estén acotadas.

10 Sean X un espacio métrico compacto y A un conjunto. Probar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en \mathbb{R} que converge uniformemente a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, y $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \rightarrow X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de A en \mathbb{R} converge uniformemente a $f \circ g$. Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se omite la hipótesis de X compacto.

11 Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ y f'_n en $[-1, 1]$.

12 Sean X e Y espacios métricos. Una familia \mathcal{F} de funciones de X en Y es equicontinua en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}, d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

(a) Probar que cualquier familia finita de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0 .

(b) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones de X en Y que son acotadas. Probar que si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.

(c) Probar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en Y que converge uniformemente en X , entonces $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia equicontinua.

Supongamos desde ahora que X es compacto.

(d) Probar que si \mathcal{F} es una familia equicontinua de funciones de X en Y , entonces \mathcal{F} es uniformemente equicontinua.

(e) Probar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de X en Y uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \rightarrow Y$, entonces esa convergencia es uniforme en X .

13 Sean f_n continuas en $[0, 1]$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

14 Hallar (y justificar) los conjuntos de \mathbb{R} de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n; \quad ii) \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

¿Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término?

15 Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, \infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

16 Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que las dos series de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ convergen absoluta y uniformemente en \mathbb{R} .

17 Si $x \in \mathbb{R}$, sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

- i) Determine el subconjunto de \mathbb{R} sobre el cual esta definición tiene sentido.
- ii) ¿Sobre qué intervalos es uniforme la convergencia?
- iii) ¿Sobre qué intervalos no es uniforme la convergencia?
- iv) ¿Es f continua en su dominio?
- v) ¿Es f acotada?

18 Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $[a, b]$ en \mathbb{R} integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi) d\xi$$

para cada $x \in [a, b]$. Probar que la sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.

19 Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\int_0^1 f(x) x^n dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f \equiv 0$ en $[0, 1]$. (Sugerencia: Usar el Teorema de Stone-Weierstrass.)