Práctica 5: Conexión

1 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) son conexos:

$$\mathbb{N}, \qquad [0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

2 Analizar la validez de las siguientes afirmaciones en un espacio métrico arbitrario (X,d). Pensar además si las que son falsas se vuelven verdaderas cuando el espacio es $\mathbb{R}^n$.

(a) Toda bola abierta $B(a,r)$ es conexa.
(b) Para todo $a \in X$, existe $r > 0$ tal que la bola $B(a,r)$ es conexa.
(c) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cup B$ es conexo.
(d) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cap B$ es conexo.
(e) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A - B$ es conexo.
(f) Si $A \subset X$ es conexo y x es un punto de acumulación de A, entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.
(g) Si $A \subset X$ es conexo, entonces A° es conexo.
(h) Si $A \subset X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

3 Probar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x,y)\| < 2\}$ es conexo.

4 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

(a) No existen U, V abiertos en C, no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$.
(b) No existen $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ abiertos en X tales que $C \cap \mathscr{U} \neq \varnothing$, $C \cap \mathscr{V} \neq \varnothing$, $C \cap \mathscr{U} \cap \mathscr{V} = \varnothing$ y $C \subset \mathscr{U} \cup \mathscr{V}$.
(c) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

5 Sea (X,d) un espacio métrico y sea C un subconjunto de X que no es conexo. Probar que existen $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ abiertos en X **disjuntos** tales que $C \cap \mathscr{U} \neq \varnothing$, $C \cap \mathscr{V} \neq \varnothing$ y $C \subset \mathscr{U} \cup \mathscr{V}$.

6 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathscr{A}$ existen $A_0, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ es conexo.

7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

8 Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) (X,d) es un espacio métrico conexo;
(ii) toda función continua $f : X \to \{0,1\}$ es constante.

9 Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.
(Que $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $m \neq n$ es un resultado mucho más avanzado, que se verá en Topología.)

10 Probar que los espacios métricos $(0,1)$, $[0,1)$ y $[0,1]$ (con las métricas que heredan como subespacios de $\mathbb{R}$) son dos a dos no homeomorfos.

11 (*a*) Sea (X,d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.

(*b*) Probar que si (X,d) es conexo, entonces $\#X = 1$ o $\#X \geq c$.

12 Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$:

i) $\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$.

ii) $\mathbb{Q}$.

iii) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$.

iv) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,0)\}$.

13 Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]$, y sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Probar que:

(*a*) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

(*b*) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X, entonces $\{(0,0),(0,1)\} \subset B$ o $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \emptyset$.

14 Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados. ¿Son abiertos?

15 Probar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos:

(*a*) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2.

(*b*) Un espacio métrico numerable.

16 Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

(*a*) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

(*b*) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

17 Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

(*a*) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(*b*) $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

(*c*) $\mathbb{R}^n - B(0,1)$.

(*d*) $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(*e*) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

18 Sean (X,d) un espacio métrico arcoconexo, (Y,d') un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

19 Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la esfera S^k como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{k+1}$ que tienen norma 1. Probar que S^1 no es homeomorfo a S^2.

20 Sea $n \geq 2$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto contable. Probar que $\mathbb{R}^n - S$ es arcoconexo.

21 Sea (X, d) un espacio métrico. Se define la siguiente relación: $x \sim y$ si existe un camino de x a y.

(a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en X.

(b) La *componente arcoconexa* de $x \in X$ se define como $C_x = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Verificar que:

i) Si $x \sim y$ entonces $C_x = C_y$

ii) Si $x \not\sim y$ entonces $C_x \cap C_y = \varnothing$

iii) $X = \bigcup_{x \in X} C_x$

(c) Mostrar que X es arcoconexo si y sólo si tiene una única componente arcoconexa.

22 En el espacio $(C[0,1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \ \forall\, x \in [0,1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.

23 Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x, existe un abierto conexo (resp. arcoconexo) V tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

(a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\Longleftrightarrow$ A es arcoconexo.

(b) Un espacio métrico X es localmente (arco)conexo si y sólo si para todo U abierto de X, las componentes (arco)conexas de U son abiertas.

(c) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

(d) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

(e) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.