Práctica 3: Funciones continuas, completitud

Continuidad

1 Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f : X \to Y$. Probar que:

(a) f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x_0$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ converge a $f(x_0)$.

(b) Son equivalentes:

(i) f es continua;

(ii) para todo $G \subset Y$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto en X;

(iii) para todo $F \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

2 Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\,|)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, donde d es la métrica euclídea.

(b) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ es la métrica discreta.

(c) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ es la métrica discreta.

(d) $i : (E,d) \longrightarrow (X,d)$, la inclusión, donde $E \subset X$.

3 Sea X un espacio métrico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo subconjunto de X es abierto.

(ii) Dados cualquier espacio métrico Y y cualquier función $f : X \to Y$, resulta que f es continua.

4 Sean $f, g, h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad g(x) = x \cdot f(x); \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } (m:n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

(a) f es discontinua en todo punto.

(b) g sólo es continua en $x = 0$.

(c) h es continua en $[0,1] - \mathbb{Q}$.

5 Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea, probar que:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \cdot \mathrm{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.

(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

6 Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f, definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

7 Sea $f:(X,d)\to(Y,d')$ una función. **Analizar la validez** de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $X=\bigcup_{i\in I}U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i\in I$, entonces $f:X\to Y$ es continua.

(b) Si $X=\bigcup_{i\in I}F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i\in I$, entonces $f:X\to Y$ es continua.

(c) Si $X=\bigcup_{i=1}^{m}F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para cada $i=1,\dots,m$, entonces $f:X\to Y$ es continua.

(d) Si $X=\bigcup_{i=1}^{m}X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para cada $i=1,\dots,m$, entonces $f:X\to Y$ es continua.

8 Sean (X,d) un espacio métrico y $f:X\to\mathbb{R}$ una función. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, los conjuntos $\{x\in X: f(x)<\alpha\}$ y $\{x\in X: f(x)>\alpha\}$ son abiertos.

9 Sea $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ una función.

(a) Probar que f es continua. ¿Sigue valiendo si f toma valores irracionales?

(b) Suponiendo que f es biyectiva, ¿puede ser un homeomorfismo?

10 Sea (X,d) un espacio métrico, y sea $\Delta: X\to X\times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x)=(x,x)$. Probar que:

(a) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x,x): x\in X\}\subset X\times X$.

(b) $\Delta(X)$ es cerrado en $X\times X$.

11 Sean X,Y espacios métricos. Sea $f:X\to Y$ una función continua y suryectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

12 Sean d,d' dos métricas topológicamente equivalentes en un conjunto X. Probar que (X,d) es separable si y sólo si (X,d') lo es.

13 Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Una aplicación $f:X\to Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A\subset X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F\subset X$.

(a) Suponiendo que f es biyectiva, probar que f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

(b) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta.

(c) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada.

(d) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

14 Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f:X\to Y$ una función.

(a) Probar que f es continua si y sólo si $f\left(\overline{E}\right)\subset\overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E\subset X$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

(*b*) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f\left(\overline{E}\right) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

15 (*a*) Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $D \subset X$ denso. Sean $f,g : X \to Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(*b*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todos $x,y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

16 Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞.

(*a*) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son continuas y abiertas. Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

(*b*) Sea (Z,d'') un espacio métrico y sea $f : Z \to X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

17 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow f(x_0) < f(x) + \varepsilon \qquad \text{(resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x)\text{)}.$$

Probar que:

(*a*) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0.

(*b*) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha,+\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*c*) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty,\alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*d*) Si $A \subset X$ y $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ es su función característica, entonces χ_A es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y sólo si A es abierto (resp. cerrado).

18 Consideramos las funciones $E, I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ e } I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(*a*) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(*b*) Demostrar que si, en cambio, utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, I es una función continua pero E no lo es.

(*c*) Analizar si es posible que una función $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

Continuidad uniforme

19 Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\, d(x_1,x_2)$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

20 Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$ es uniformemente continua.

21 **(Teorema de Urysohn)** Sea (X,d) un espacio métrico y sean A,B cerrados disjuntos de X.

(a) Probar que existe una función $f: X \to \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0, \qquad f|_B \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in X.$$

Sugerencia. Considerar la función $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$.

(b) Deducir que existen abiertos $U,V \subset X$ disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

22 (a) Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f: X \to Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

i) $d(x_n, y_n) \to 0$ para $n \to \infty$

ii) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$

entonces f no es uniformemente continua en A.

(b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

(c) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0,1)$.

23 (a) Dar un ejemplo de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

24 Sea $f: (X,d) \to (Y,d')$ una función uniformemente continua, y sean $A,B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A,B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

25 (a) Sea $f: (X,d) \to (Y,d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

(b) Sea $f: (X,d) \to (Y,d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X,d) es completo si y sólo si (Y,d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

26 Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f: D \to Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F: X \to Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

Completitud

27 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X. Probar que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

(b) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(c) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

(d) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(e) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

28 Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

29 Sean A y B subespacios de un espacio métrico. Probar que si A y B son completos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son completos.

30 Sea X un conjunto y sea δ la métrica discreta definida en el Ejercicio 3 de la Práctica 2. Probar que (X, δ) es un espacio métrico completo.

31 Sea (X, d) un espacio métrico.

(a) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

(b) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

32 Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

33 (a) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada }\}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

(c) Probar que $C_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_n \to 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n), (b_n)) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

34 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathscr{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por puntos <u>de $\mathscr{D}$</u> converge en X. Probar que X es completo.

35 *Teorema de Cantor.*

Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ tiene un único punto en la intersección.

36 Sea (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados. Probar que X tiene cardinal mayor o igual que c. Deducir que si además X es separable, entonces $\#X = c$. (Para esto último, puede servir un ejercicio de la práctica anterior.)