Práctica 2: Espacios métricos, separabilidad

Ejemplos de métricas

1 Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le 5)$ como:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \qquad d_3(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|,$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y|, \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

2 Sean d_1, d_2, $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}, \quad d_\infty(x,y) = \sup_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

(*a*) Probar que estas funciones son métricas.

(*b*) Para $n = 2$, dibujar las bolas abiertas $B(0,1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Notar que la métrica d_2 de este ejercicio es la métrica usual de $\mathbb{R}^n$. En adelante, a menos que se indique una métrica diferente, supondremos que $\mathbb{R}^n$ tiene dicha métrica.

3 Sea X un conjunto y sea $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica, y hallar los abiertos de (X, δ).

Nota. δ se llama la *métrica discreta* en X.

4 Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo fijo, y sea $N : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(a) := \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } p^n \mid a \text{ y } p^{n+1} \nmid a; \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) := N(a-b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

5 Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ y sea $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

6 Dados números reales $a < b$, sea $C[a,b]$ el conjunto de todas las funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ que son continuas. Probar que $(C[a,b], d_1)$ y $(C[a,b], d_\infty)$ son espacios métricos, donde

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx, \qquad d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

7 Sea (X,d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

(a) Probar que d' también es una métrica en X, que satisface $0 \leq d'(x,y) < 1$ para cualesquiera $x,y \in X$.

(b) Probar que un subconjunto $A \subset X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d'.

(c) Deducir que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto x con la métrica d si y sólo si también converge a x con la métrica d'.

8 Sean (X_1,d_1) y (X_2,d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la función $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$.

(a) Probar que d es una métrica en $X_1 \times X_2$.

(b) Probar que en el espacio métrico $(X_1 \times X_2, d)$ se cumple que una sucesión $((a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto (a,b) si y sólo si converge en cada coordenada, es decir, si y sólo si $a_n \to a$ en (X_1,d_1) y $b_n \to b$ en (X_2,d_2).

9 Sea $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos, y consideramos el producto cartesiano $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. El objetivo de este ejercicio es construir una métrica para X en la cual la convergencia de una sucesión equivalga a la convergencia en cada coordenada, como en el ejercicio anterior.

(a) Supongamos primero que todos los X_n tienen diámetro menor o igual que 1, es decir $d_n(x,y) \leq 1$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $x,y \in X_n$. Dados dos elementos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, definimos

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}.$$

Probar que d es una métrica en X.

(b) Sea $x^1, x^2, x^3, \ldots$ una sucesión de puntos de X, es decir: para cada $k \in \mathbb{N}$, x^k es una sucesión $(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots)$ en la cual $x_n^k \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento de X. Probar que, con la métrica d definida en el ítem anterior, $x^k \to x$ en X si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n^k \to x_n$ en X_n.

(c) Mostrar cómo se puede reducir el caso general (es decir, sin la hipótesis $\mathrm{diam}(X_n) \leq 1$) al caso ya resuelto.

Nociones topológicas

10 Sea (X,d) un espacio métrico.

(a) Sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de X. Probar que $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado.

(b) Sean $\{F_1,\ldots,F_n\}$ subconjuntos cerrados de X. Probar que $F = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ es cerrado.

11 Sea (X,d) un espacio métrico y sean $A,B \subseteq X$. Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

(*a*) $A^\circ = \bigcup\limits_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$. Deducir que A° es el abierto más grande que está contenido en A.

(*b*) $\varnothing^\circ = \varnothing$ y $X^\circ = X$

(*c*) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

(*d*) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

(*e*) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

12 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Probar que:

(*a*) $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a x;

(*b*) x es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A **distintos de** x tal que $x_n \to x$.

13 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ un conjunto numerable. Probar que $\#\overline{A} \leq c$.

14 Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Probar las siguientes propiedades, que relacionan interior y clausura:

(*a*) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$

(*b*) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

(*c*) A es cerrado $\iff X - A$ es abierto

¿Es siempre cierto que $\overline{A} = \overline{A^\circ}$? ¿Y que $A^\circ = \left(\overline{A}\right)^\circ$?

15 Sea (X,d) un espacio métrico y sean $A,B \subseteq X$. Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

(*a*) $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$. Deducir que $\overline{A}$ es el cerrado más chico que contiene a A.

(*b*) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ y $\overline{X} = X$

(*c*) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(*d*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

(*e*) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. ¿Vale la igualdad?

16 Sea (X,d) un espacio métrico y sean $A,B \subseteq X$. Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

(*a*) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

(*b*) ∂A es cerrado

(*c*) $\partial A = \partial(X - A)$

17 Sea (X,d) un espacio métrico y sean $A,B \subseteq X$. Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

(a) A' es cerrado

(b) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$

(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(d) $\overline{A} = A \cup A'$

(e) $\left(\overline{A}\right)' = A'$

18 Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

19 Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$.

(a) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.

(b) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

20 Sean (X, d) un espacio métrico, p un punto de X y a, b números reales tales que $0 < a < b$. Probar que:

(a) $\{x \in X \mid a < d(x, p) < b\}$ es abierto;

(b) $\{x \in X \mid a \leq d(x, p) \leq b\}$ es cerrado.

21 Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 8. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

(a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

22 Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0, 1]; \qquad (0, 1); \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \qquad \mathbb{Z}; \qquad [0, 1) \cup \{2\}.$$

23 Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

24 Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

(a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

25 Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $x, y \in X$, entonces $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) $x \in A \implies d(x,A) = 0$.

(c) $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(d) Si $r > 0$, el conjunto $B(A,r) = \{x \in X : d(x,A) < r\}$ es abierto.

(e) Si $r > 0$, el conjunto $B[A,r] = \{x \in X : d(x,A) \leq r\}$ es cerrado.

26 Sea (X,d) un espacio métrico. Si A, $B \subseteq X$ son subconjuntos no vacíos, se define la *distancia entre A y B* como

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $d(A,B) = d(\overline{A},\overline{B})$.

(b) $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing$.

(c) $d(A,B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

(d) Para todo $C \subseteq X$ no vacío vale que $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

27 Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

(a) Probar que A es un G_δ si y sólo si $X - A$ es un F_σ.

(b) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

(c) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0,1)$. Idem con $[0,1]$.

(d) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0,1)$.

Separabilidad

28 Probar que $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es separable.

29 Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \exists\, n_0 : a_n = 0\ \forall\, n \geq n_0\}$. Se considera la función $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico y que es separable.

30 Sean (X,d) un espacio métrico y $\mathscr{B}$ un conjunto de abiertos de X. Probar que $\mathscr{B}$ es una base de abiertos de X si y sólo si verifica la siguiente condición: "Todo abierto de X se puede escribir como unión de elementos de $\mathscr{B}$".

31 Sea (X,d) un espacio métrico separable. Probar que $\#\{U \subset X : U \text{ es abierto}\} \leq c$.

32 Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

33 Sea (X,d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es contable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es contable.

34 Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X,d) e (Y,d') son separables.

35 ¿Es el espacio $(\ell^{\infty}, d_{\infty})$ separable?

36 Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subset X$ un subconjunto. Se dice que un punto $x \in X$ es *punto de condensación* de S si para todo $r > 0$ vale que $B(x, r) \cap S$ es no numerable.
Probar que si X es separable y S es no numerable, entonces:

(a) existe algún $x \in S$ que es punto de condensación de S;

(b) hay no numerables puntos de S que son puntos de condensación de S.