

Práctica 1: Posets, cardinalidad, lema de Zorn

Posets

Un *poset* (*partially ordered set*) es un conjunto P junto con una relación de orden $\preceq$. Si para cada par de elementos $x, y \in P$ se cumple que $x \preceq y$ o que $y \preceq x$, se dice que P es *totalmente ordenado*, o también que es una *cadena*.

Un *reticulado* es un poset en el cual todo subconjunto de dos elementos $\{x, y\}$ tiene supremo e ínfimo. Se usa la notación $x \vee y$ para el supremo y $x \wedge y$ para el ínfimo.

Un *reticulado distributivo* es un reticulado L en el que se cumple que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ para cualesquiera $x, y, z \in L$. Esto resulta ser equivalente a que $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ para cualesquiera $x, y, z \in L$. ([Ejercicio 5](#))

Un *reticulado completo* es un poset en el cual todo subconjunto no vacío tiene supremo e ínfimo.

- 1 Probar que todo reticulado completo tiene máximo y mínimo.
- 2 Probar que toda cadena es un reticulado distributivo.
- 3 Sea L un conjunto parcialmente ordenado con la propiedad de que todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo. Probar que todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.
- 4 Probar que en cualquier reticulado todo subconjunto *finito* no vacío tiene supremo e ínfimo.
- 5 Sea L un reticulado, probar que son equivalentes:
 - (i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ para cualesquiera $x, y, z \in L$;
 - (ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ para cualesquiera $x, y, z \in L$.
- 6 Sea L un conjunto ordenado en el cual todo subconjunto no vacío tiene máximo y mínimo. Probar que L es una cadena finita.
- 7 Una *anticadena* en un poset P es un subconjunto $A \subseteq P$ en el cual ningún par de elementos son comparables, es decir: para cualesquiera $x, y \in A$ distintos, no se cumple $x \preceq y$ ni $y \preceq x$.
Sea P un poset en el cual el máximo tamaño de una cadena es k . Probar que P se puede escribir como unión de k anticadenas, y no se puede con menos de k anticadenas.

Dados dos posets P_1 y P_2 , se dice que una función $f : P_1 \rightarrow P_2$ es un *morfismo de orden*, o también que es *creciente*, si $a \preceq b$ en P_1 implica que $f(a) \preceq f(b)$ en P_2 .

Un *isomorfismo de orden* es una función $f : P_1 \rightarrow P_2$ que es **biyectiva** y cumple que $a \preceq b$ en P_1 **si y sólo si** $f(a) \preceq f(b)$ en P_2 .

- 8 Dar un ejemplo de una función biyectiva entre dos posets que sea morfismo de orden pero no sea isomorfismo.
- 9 Sean P_1 una cadena, P_2 un poset cualquiera y $f : P_1 \rightarrow P_2$ una función **inyectiva** que es morfismo de orden. Probar que si $a, b \in P_1$ cumplen que $f(a) \preceq f(b)$, entonces $a \preceq b$.
- 10 Sean L_1 y L_2 dos reticulados y $f : L_1 \rightarrow L_2$ un isomorfismo de orden. Probar que se cumple $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ para cualesquiera $a, b \in L_1$.

Cardinalidad

11 Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Para cada $a \in A$ se define el conjunto $[a] = \{b \in A : a \sim b\}$. Probar que:

(a) Para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$ vale que $[a_1] = [a_2]$ o $[a_1] \cap [a_2] = \emptyset$.

(b) $A = \bigcup_{a \in A} [a]$.

12 Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

(i) A es infinito.

(ii) Para todo $x \in A$, existe una función $f_x : A \rightarrow A - \{x\}$ biyectiva.

(iii) Para todo $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$, existe una función $f_{\{x_1, \dots, x_n\}} : A \rightarrow A - \{x_1, \dots, x_n\}$ biyectiva.

13 Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B . Probar que B es contable.

14 Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} ; \mathbb{Z}_{\geq -3} ; 3 \cdot \mathbb{N} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N}^2 ; \mathbb{Z} \times \mathbb{N} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

15 (a) Sean A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

(b) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.

(c) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\#\mathcal{S} = \aleph_0$. Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos.

16 Sean A y B conjuntos, A infinito y B numerable. Probar que:

(a) Existe una biyección entre $A \cup B$ y A .

(b) Si A no es numerable y $B \subseteq A$, entonces existe una biyección entre $A - B$ y A .

17 Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros es numerable.

18 Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros $a_0, \dots, a_n$, no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0.$$

(a) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

(b) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: Estos números se llaman *trascendentes*.

19 Sea X un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ vale $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$. Probar que X es contable.

20 Sea Λ un conjunto y sea $(I_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ disjuntos dos a dos, es decir, tales que $I_\alpha \cap I_{\alpha'} = \emptyset$ si $\alpha \neq \alpha'$. Probar que Λ es contable.

21 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que

$$\#\{x \in \mathbb{R} : f \text{ no es continua en } x\} \leq \aleph_0.$$

22 Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

23 Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

- (a) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $\{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$
- (c) $\{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$
- (d) $\{(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0\}$
- (e) $\{(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (q_n) \text{ es periódica}\}$
- (f) $\{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \quad (m \in \mathbb{N}_{>1})$

24 Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

- (a) $\{I : I \text{ es un intervalo cerrado de } \mathbb{R}\} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$
- (b) $\{I : I \text{ es un intervalo cerrado de extremos racionales}\}$
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 7\}$
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y \geq 7\}$
- (e) $\mathbb{R}_{>0}$

25 Probar que una unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c .

26 Sean a, b, c cardinales. Probar que:

- (a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$
- (b) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c.$
- (c) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}.$
- (d) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c.$
- (e) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a.$

27 Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$

28 Mostrar que $\mathbb{R}$ es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c .

29 Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{R}) &= \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} & \mathcal{F}(\mathbb{Q}) &= \{f \mid f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ es continua}\} & \mathcal{C}(\mathbb{Q}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \mid f \text{ es continua}\} \end{aligned}$$

- (a) Probar que $\#(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > c$.
- (b) Calcular $\#(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$.
- (c) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.
- (d) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva.
- (e) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

30 Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$) tiene cardinal c .

Lema de Zorn

31 Sean A y B conjuntos no vacíos. Probar que o bien existe $f : A \rightarrow B$ inyectiva, o bien existe $g : B \rightarrow A$ inyectiva. En otras palabras, $\#A \leq \#B$ o $\#B \leq \#A$.

32 Sean A y B conjuntos no vacíos. Probar que existe una función sobreyectiva $f : A \rightarrow B$ si y solo si existe una función inyectiva $g : B \rightarrow A$.

33 Probar que en un espacio vectorial:

- i) todo conjunto linealmente independiente puede extenderse a una base;
- ii) de todo sistema de generadores se puede extraer una base.

34 Sea X un conjunto y sea $\mathcal{R}$ una relación de orden definida en X . Probar que $\mathcal{R}$ se puede extender a un orden total: es decir, existe una relación de orden $\tilde{\mathcal{R}} \supset \mathcal{R}$ tal que para cualesquiera $a, b \in X$ se tiene que $(a, b) \in \tilde{\mathcal{R}}$ o bien $(b, a) \in \tilde{\mathcal{R}}$.