Práctica 0: Repaso

Números reales

1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) s es el supremo de A;

(ii) s es cota superior de A y además cumple que: $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

2 Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$.

(a) Verificar que $A_x \neq \varnothing$ y es acotado superiormente. Concluir que existe el máximo de A_x. Este número se llama la *parte entera de* x y se notará $\lfloor x \rfloor$.

(b) Demostrar las siguientes afirmaciones:

- $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
- $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.
- Si $x < y$, entonces $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

3 (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

(c) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s.

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y.

4 Sean $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$.

5 Sea $A = \left\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$. ¿Qué sucede si cambiamos el 2 del denominador por otro número $b \in \mathbb{R}_{>0}$?

6 Probar que toda subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

7 Probar que una sucesión monótona de números reales es convergente si y sólo si es acotada.

8 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de números reales. Probar que si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ. ¿Qué pasa si la subsucesión tiene límite infinito?

9 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales que satisfacen las siguientes dos condiciones:

- Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple $a_n \leq b_n \leq c_n$;
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Probar que $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

10 ¿Es cierto que si una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ entonces es convergente?

11 Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión de números racionales $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, estrictamente decreciente, tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

Conjuntos y funciones

12 Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

(a) $B - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (B - A_i)$.

(b) $B - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (B - A_i)$.

(c) $\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right)$.

13 Sean $f : X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(c) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

(d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalizar (d) y (e) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

14 Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que f es sobreyectiva si y sólo si para todo $B \subseteq Y$ vale que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

15 Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es inyectiva;

(ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para cualesquiera $A, B \subseteq X$;

(iii) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$;

(iv) $f(A) \cap f(B) = \varnothing$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \varnothing$;

(v) $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para cualesquiera $B \subseteq A \subseteq X$.

16 Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

- $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- $B_k \cap B_j = \varnothing$ si $k \neq j$;
- $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.