CÁLCULO DIFERENCIAL

1 Definición y propiedades básicas

Una función $f\colon U \to V$, donde $U \subseteq E$ y $V \subseteq F$ son subconjuntos abiertos de espacios de Banach E y F, es *diferenciable* en un punto $x_0 \in U$ si existe $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|f(x_0+v) - f(x_0) - T(v)\|}{\|v\|} = 0.$$

Es evidente que esto ocurre si y sólo si existe una función $R\colon U - x_0 \to F$, donde

$$U - x_0 := \{v \in E : v = u - x_0 \text{ para un } u \in U\},$$

tal que

$$f(x_0+v) = f(x_0) + T(v) + R(v) \quad \text{y} \quad \lim_{v\to 0} \frac{R(v)}{\|v\|} = 0.$$

Observación 1.1. *Si existe, T es único.*

Proof. Supongamos que $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E,F)$ tiene la misma propiedad que T. Usando que para cada $v \in E \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\frac{\|T(v) - \widetilde{T}(v)\|}{\|v\|} &= \frac{\|(f(x_0+v) - f(x_0) - \widetilde{T}(v)) - (f(x_0+v) - f(x_0) - T(v))}{\|v\|}\\ &\le \frac{\|f(x_0+v) - f(x_0) - \widetilde{T}(v)\|}{\|v\|} + \frac{\|f(x_0+v) - f(x_0) - T(v)\|}{\|v\|},\end{aligned}$$

y que la expresión a la derecha de la desigualdad anterior es un infinitésimo cuando v tiende a cero, es facil ver que para todo $v \neq 0$

$$0 = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\|T(\lambda\cdot v) - \widetilde{T}(\lambda\cdot v)\|}{\|\lambda\cdot v\|} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{|\lambda|\|T(v) - \widetilde{T}(v)\|}{|\lambda|\|v\|} = \frac{\|T(v) - \widetilde{T}(v)\|}{\|v\|}.$$

Así, $T(v) = \widetilde{T}(v)$. Como T y $\widetilde{T}$ también coinciden en 0 porque son lineales, esto termina la demostración. □

Si f es diferenciable en x_0, la función T, cuya unicidad acabamos de probar, es llamada la *diferencial* de f en x_0 y denotada $\mathrm{D}f(x_0)$. Dejamos al lector la tarea de probar que si las normas de E y F se cambian por normas equivalentes, las funciones diferenciables y la diferencial permanecen invariantes.

Una función $f\colon U \to V$ es *diferenciable* si lo es en cada punto de U y es *diferenciable* con *continuidad* o de *clase* C^1 si además la función diferencial $\mathrm{D}f\colon U \to \mathcal{L}(E,F)$ es continua.

Proposición 1.2. *Si $f\colon U \to V$ es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

Proof. Porque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| &= \lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0) - \mathrm{D}f(x_0)(x-x_0) + \mathrm{D}f(x_0)(x-x_0)\|\\ &\le \lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0) - \mathrm{D}f(x_0)(x-x_0)\| + \lim_{x\to x_0} \|\mathrm{D}f(x_0)(x-x_0)\|\\ &= 0.\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.3 (Linealidad)**.** *Si $f\colon U \to V$ y $g\colon U \to V$ son diferenciables en x_0, entonces $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ es diferenciable en x_0 para todo $\lambda, \mu \in k$ y*

$$\mathrm{D}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x_0) = \lambda \cdot \mathrm{D}f(x_0) + \mu \cdot \mathrm{D}g(x_0).$$

Proof. Dejada al lector. $\square$

Teorema 1.4 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ y $W \subseteq G$ subconjuntos abiertos de espacios de Banach E, F y G. Si $f\colon U \to V$ es diferenciable en x_0 y $g\colon V \to W$ es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y*

$$\mathrm{D}(g \circ f)(x_0) = \mathrm{D}g(f(x_0)) \circ \mathrm{D}f(x_0).$$

Proof. Como g es diferenciable en $f(x_0)$ existe $R_g\colon V - f(x_0) \longrightarrow G$ tal que

$$g(f(x_0)+w) - g(f(x_0)) = \mathrm{D}g(f(x_0))(w) + R_g(w) \quad \text{y} \quad \lim_{w\to 0)} \frac{R_g(w)}{\|w\|} = 0.$$

Por la hipótesis sobre f existe $R_f\colon U - x_0 \to F$ tal que

$$f(x_0+v) - f(x_0) = \mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v) \quad \text{y} \quad \lim_{v\to 0} \frac{R_f(v)}{\|v\|} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g\big(f(x_0+v)\big) - g\big(f(x_0)\big) &= g\big(f(x_0) + f(x_0+v) - f(x_0)\big) - g\big(f(x_0)\big) \\ &= \mathrm{D}g\big(f(x_0)\big)\big(f(x_0+v) - f(x_0)\big) + R_g\big(f(x_0+v) - f(x_0)\big) \\ &= \mathrm{D}g\big(f(x_0)\big)\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big) + R_g\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big) \\ &= \mathrm{D}g\big(f(x_0)\big)\big(\mathrm{D}f(x_0)(v)\big) + \widetilde{R}(v), \end{aligned}$$

donde $\widetilde{R}(v)$ es la función de $U - x_0$ en G, definida por

$$\widetilde{R}(v) = \mathrm{D}g(f(x_0))\big(R_f(v)\big) + R_g\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big).$$

Para terminar la demostración, será suficiente mostrar que

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|\widetilde{R}(v)\|}{\|v\|} = 0. \tag{1.1}$$

Escribamos

$$B(v) = \begin{cases} \frac{\|R_g\left(\mathrm{D}f(x_0)(v)+R_f(v)\right)\|}{\|\mathrm{D}f(x_0)(v)+R_f(v)\|} & \text{si } \mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v) = 0. \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que si $v \in U - x_0$ es no nulo, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\|\widetilde{R}(v)\|}{\|v\|} &\le \|\mathrm{D}g(f(x_0))\| \frac{\|R_f(v)\|}{\|v\|} + \frac{\|R_g\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big)\|}{\|v\|} \\ &= \|\mathrm{D}g(f(x_0))\| \frac{\|R_f(v)\|}{\|v\|} + B(v) \frac{\|\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\|}{\|v\|}. \end{aligned}$$

Estas desigualdades implican que (1.1) vale, ya que

$$\lim_{v\to 0} \|\mathrm{D}g(f(x_0))\| \frac{\|R_f(v)\|}{\|v\|} = \lim_{v\to 0} B(v) = 0,$$

y la función

$$v \mapsto \frac{\|\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\|}{\|v\|}$$

es acotada en un entorno reducido de 0. □

Proposición 1.5. *Denotemos con U un abierto de k y con V un abierto de un espacio de Banach F. Una función $f\colon U \to V$ es diferenciable en un punto $t_0 \in U$ si y sólo si f es derivable en t_0. Es decir, si y sólo si el límite*

$$f'(t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h},$$

llamado derivada de f en t_0, *existe. Además, la diferencial de f en t_0 está dada por*

$$\mathrm{D}\, f(t_0)(h) = h \cdot f'(t_0).$$

Proof. Supongamos que f es derivable en t_0. Entonces de la igualdad

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)-h\cdot f'(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'(t_0) = 0.$$

se sigue que f es diferenciable en t_0 y $\mathrm{D}f(t_0)(h) = h \cdot f'(t_0)$. Supongamos ahora que f es diferenciable en t_0 y tomemos $y \in F$ tal que $\mathrm{D}f(t_0)(h) = h\cdot y$. De la igualdad

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)-h\cdot y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - y$$

se sigue que f es derivable en t_0 y $f'(t_0) = y$. □

Ejemplos 1.6. *A continuación damos unos pocos ejemplos de funciones diferenciables.*

(1) *Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces T es diferenciable y $DT(x) = T$ para todo $x \in E$.*

(2) *Las funciones constantes $c\colon E \to F$ son diferenciables, con diferencial nula.*

(3) *Si A es un álgebra de Banach, entonces la función $f\colon U(A) \to U(A)$, definida por $f(a) = a^{-1}$, es diferenciable y $\mathrm{D}f(a)(b) = -a^{-1}ba^{-1}$. En efecto, usando que*

$$(a+x)^{-1} - a^{-1} = (a+x)^{-1}(a-(a+x))a^{-1} = -(a+x)^{-1}xa^{-1},$$

y haciendo algunas acotaciones sencillas, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\frac{\|f(a+x)-f(a)+a^{-1}xa^{-1}\|}{\|x\|} &= \frac{\|-(a+x)^{-1}xa^{-1}+a^{-1}xa^{-1}\|}{\|x\|}\\ &\le \frac{\|(a+x)^{-1}-a^{-1}\|\|x\|\|a^{-1}\|}{\|x\|}\\ &= \|(a+x)^{-1}-a^{-1}\|\|a^{-1}\|.\end{aligned}$$

La afirmación se sigue inmediatamente de este hecho ya que $\|(a+x)^{-1}-a^{-1}\|\|a^{-1}\|$ tiende a 0 cuando x tiende a 0.

2 Derivaciones entre Productos de Espacios de Banach

Vamos a estudiar ahora la diferenciabilidad de funciones cuyo dominio o codominio es un producto de un número finito de espacios de Banach, o bien que se factorizan a través de un espacio que lo es. Consideremos entonces un producto de espacios de Banach $F_1 \times \cdots \times F_n$ y denotemos con $\pi_i\colon F_1\times\cdots\times F_n \to F_i$ a las proyecciones canónicas y con $u_i\colon F_i \to F_1\times\cdots\times F_n$ a las inclusiones canónicas. Notemos que

- $\pi_i \circ u_i = \mathrm{id}_{F_i}$,
- $\sum_{i=1}^n u_i \circ \pi_i = \mathrm{id}_{F_1\times\cdots\times F_n}$.

Teorema 2.1. *Consideremos un abierto U de un espacio de Banach E y un producto $F_1 \times \cdots \times F_n$ de espacios de Banach. Una función $f\colon U \to F_1 \times \cdots \times F_n$ es diferenciable en un punto x_0 si y sólo si cada una de sus componentes $f_i : \pi_i \circ f$ lo es. Además, $\mathrm{D}f(x_0) = \sum_{i=1}^n u_i \circ \mathrm{D}f_i(x_0)$.*

Proof. Si f es diferenciable en x_0, entonces por la regla de la cadena y el item 1 de los Ejemplos 1.6 $f_i = \pi_i \circ f$ es diferenciable en x_0 y $\mathrm{D}f_i(x_0) = \pi_i \circ \mathrm{D}f(x_0)$. Por las mismas razones, si las f_i's son diferenciables en x_0, entonces

$$f = \sum_{i=1}^n u_i \circ \pi_i \circ f = \sum_{i=1}^n u_i \circ f_i$$

también lo es y $\mathrm{D}f(x_0) = \sum_{i=1}^n u_i \circ \mathrm{D}f_i(x_0)$. □

Lema 2.2. *Si F_1, F_2 y G son espacios de Banach y $h\colon F_1 \times F_2 \to G$ es una función bilineal y continua, entonces h es diferenciable y $\mathrm{D}h(x_0, y_0)(v, w) = h(v, y_0) + h(x_0, w)$.*

Proof. Debemos probar que

$$\lim_{(v,w)\to 0} \frac{\|h((x_0, y_0) + (v, w)) - h(x_0, y_0) - h(v, y_0) - h(x_0, w)\|}{\|(v, w)\|} = 0.$$

Pero esto se sigue inmediatamente de que

$$\begin{aligned}
\frac{\|h((x_0, y_0) + (v, w)) - h(x_0, y_0) - h(v, y_0) - h(x_0, w)\|}{\|(v, w)\|} &= \frac{\|h(v, w)\|}{\|(v, w)\|} \\
&\le \frac{\|h\|\|v\|\|w\|}{\|(v, w)\|} \\
&\le \|h\|\|w\|
\end{aligned}$$

y de que $\lim_{(v,w)\to 0} \|h\|\|w\| = 0$. □

Ejemplo 2.3. *Si A es un álgebra de Banach, entonces la multiplicación $m\colon A \times A \to A$ es diferenciable y $\mathrm{D}m(a, b)(v, w) = vb + aw$.*

Proposición 2.4. *Consideremos espacios de Banach E, F_1, F_2 y G y un subconjunto abierto U de E. Si $f_1\colon U \to F_1$ y $f_2\colon U \to F_2$ son funciones diferenciables en un punto $x_0 \in U$ y $h\colon F_1 \times F_2 \to G$ es una función bilineal y continua, entonces la función $w\colon U \to G$, definida por $w(x) = h(f_1(x), f_2(x))$, es diferenciable en x_0 y*

$$\mathrm{D}w(x_0)(v) = h(\mathrm{D}f_1(x_0)(v), f_2(x_0)) + h(f_1(x_0), \mathrm{D}f_2(x_0)(v)).$$

Proof. Por la regla de la cadena y el Teorema 2.1, sabemos que

$$\mathrm{D}w(x_0)(v) = \mathrm{D}h\big(f_1(x_0), f_2(x_0)\big)\big(\mathrm{D}f_1(x_0)(v), \mathrm{D}f_2(x_0)(v)\big).$$

El resultado se obtiene ahora inmediatamente aplicando el Lema 2.2. □

Corolario 2.5. *Consideremos un abierto U de un espacio de Banach E y un álgebra de Banach A. Si $f_1\colon U \to A$ y $f_2\colon U \to A$ son funciones diferenciables en un punto $x_0 \in U$, entonces $fg\colon U \to A$ es diferenciable en x_0 y $\mathrm{D}(fg)(x_0)(v) = f(x_0)\,\mathrm{D}g(x_0)(v) + \mathrm{D}f(x_0)(v)g(x_0)$.*

Proof. se sigue inmediatamente de la Proposición 2.4 y el Ejemplo 2.3. □

2.1 Diferenciales Parciales

Consideremos ahora una función $f\colon U \to V$, cuyo dominio es un abierto U de un producto de espacios de Banach $E_1 \times \cdots \times E_n$ y cuyo codominio es un abierto V de un espacio de Banach F. Dado $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in U$, definimos $\lambda_i\colon E_i \to E_1 \times \cdots \times E_n$ por

$$\lambda_i(x) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Denotemos con U_i a la preimagen $\lambda_i^{-1}(U)$ de U por λ_i. Si la función $f \circ \lambda_{i|U_i}$ es diferenciable en a_i, entonces llamamos a su diferencial la *diferencial parcial i-ésima* de f en a y la denotamos $\mathrm{D}_i f(\mathbf{a})$ o $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$. De la definición se sigue inmediatamente que

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{\|f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\mathbf{a}) - \mathrm{D}_i f(\mathbf{a})(x_i - a_i)\|}{\|x_i - a_1\|} = 0.$$

Cuando cada E_i es igual a k, se suele identificar la función lineal $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ con su valor $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(1)$ en 1, llamado *derivada parcial i-ésima* de f en $\mathbf{a}$.

Observación 2.6. *Para cada abierto $U \subseteq E_1 \times \cdots \times E_n$, si $f\colon U \to V$ es diferenciable en un punto $\mathbf{a}$ de U, entonces existen todas las diferenciales parciales de f en a. Además $\mathrm{D}_i f(a) = \mathrm{D} f(a) \circ u_i$, donde $u_i\colon E_i \to E_1 \times \cdots \times E_n$ es la inclusión canónica, y*

$$Df(a) = \sum_{i=1^n} \mathrm{D}_i f(a) \circ p_i,$$

donde $p_i\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to E_i$ es la proyección canónica.

Proof. El hecho de que $\mathrm{D}_i f(a) = \mathrm{D} f(a) \circ u_i$ se sigue de la regla de la cadena y de que $\mathrm{D}\lambda_i(a) = u_i$. La segunda igualdad se sigue de la regla de la cadena y de que $\sum_{i=1}^n u_i \circ p_i = \mathrm{id}_{E_1 \times \cdots \times E_n}$. □

Corolario 2.7. *Para cada abierto $U \subseteq E_1 \times \cdots \times E_n$, una función diferenciable*

$$f\colon U \to V$$

es de clase C^1 si y sólo si sus diferenciales parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathcal{L}(E_i, F)$$

son continuas.

3 El teorema de los incrementos finitos

Recordemos que para cada par de puntos a y b de un espacio de Banach E, el segmento $[a, b]$ es el conjunto

$$[a, b] = \{ta + (1 - t)b : 1 \leq t \leq 1\},$$

de E.

Lema 3.1. *Consideremos una función continua $g\colon [0, 1] \to F$, donde F es un espacio de Banach. Si g es derivable en $(0, 1)$ y $\|g'(t)\| \leq M$ para todo t, entonces $\|g(1) - g(0)\| \leq M$*

Proof. Afirmamos que

$$\|g(x) - g(0)\| \leq (M + \epsilon)x \quad \text{para todo } x \in [0, 1] \text{ y todo } \epsilon > 0. \tag{3.2}$$

En efecto, supongamos que esto no es cierto para algun ϵ y denotemos con x_0 al ínfimo de los x's para los que la desigualdad es falsa. Notemos primero que $\|g(x_0) - g(0)\| \leq (M + \epsilon)x_0$, porque de lo contrario la desigualdad (3.2) sería falsa para un $x < x_0$. Notemos también que por la definición de $g'(x_0)$ y el hecho de que $\|g(x_0)\| \leq M$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|g(t) - g(x_0)\| \leq (M + \epsilon)(t - x_0) \quad \text{para todo } t \in [0,1] \text{ entre } x_0 \text{ y } x_0 + \delta.$$

Pero entonces

$$\|g(t) - g(0)\| \leq \|g(t) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - g(0)\| \leq (M + \epsilon)x_0 + (M + \epsilon)(t - x_0),$$

lo que contradice la definición de x_0. □

Teorema 3.2 (Teorema de los incrementos finitos)**.** *Para cada función diferenciable $f\colon U \to F$ y cada segmento $[a, b] \subseteq U$,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\| \|b - a\|.$$

Proof. Si $\sup_{x\in[a,b]} \|Df(x)\| = \infty$ esto es evidente. Así que supongamos que

$$\sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\| = N \in \mathbb{R}_{\leq 0}$$

y veamos que $\|f(b) - f(a)\| \leq N\|b - a\|$. Consideremos la función $g\colon [0, 1] \to F$ definida por $g(t) := f(at + (1 - t)b)$. Notemos que g es continua. Además, por la regla de la cadena es diferenciable en cada $t \in (0, 1)$ y

$$g'(t) = Df(at + (1 - t)b)(a - b).$$

Por el Lema 3.1

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{t \in (0,1)} \|g'(t)\| = N\|b - a\|,$$

como queríamos. □

Corolario 3.3. *Si $f\colon U \to F$ es diferenciable, U es conexo y $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$, entonces f es constante.*

Proof. Tomemos un $x_0 \in U$ y consideremos el conjunto $C = f^{-1}(f(x_0))$. Por un lado, como f es continua C es cerrado en U. Por otro lado, como U es abierto, para cada punto $x \in C$ existe un $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(x) \subseteq U$, y usando el Teorema de los incrementos finitos se comprueba fácilmente que $B_{\epsilon_x}(x) \subseteq C$. Así, C es abierto. Como U es conexo esto implica que $U = C$. □

Teorema 3.4. *Consideremos una función $f\colon U \to V$, cuyo dominio es un abierto U de un producto de espacios de Banach $E_1 \times \cdots \times E_n$ y cuyo codominio es un abierto V de un espacio de Banach F. Si las diferenciales parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existen en todo punto x de U y las funciones*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathcal{L}(E_i, F)$$

son continuas en U, entonces f es diferenciable en U.

Proof. Fijemos $a \in U$ arbitrario. Es suficiente probar que f es diferenciable en a. Tomemos $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq U$ y tomemos v con $\|v\| < r$. Escribamos

$$g(b) := f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)$$

Como las derivadas parciales de f son continuas, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que tomamos menor que r) tal que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i}(a + u) \right\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + u) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \epsilon \quad \text{para } i \in \{1, \dots, n\} \text{ y todo } u \text{ con } \|u\| < \delta.$$

Escribamos $v_{\leq i} := (v_1, \dots, v_i, 0, \dots, 0)$. Por el hecho de que $v_{\leq n} = v$ y $g(a + v_{\leq 0}) = g(a) = 0$, la desigualdad triangular de $\| \ \|_F$, y el Teorema de los incrementos finitos

$$\begin{aligned}
\left\| f(a+v) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(v_i) \right\| &= \|g(a+v)\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} g(a+v_{\leq i}) - g(a+v_{\leq i-1}) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|g(a+v_{\leq i}) - g(a+v_{\leq i-1})\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon \|v_i\|_{E_i} \\
&\leq n\epsilon \|v\|,
\end{aligned}$$

siempre que $\|v\| < \delta$. Esto muestra que f es diferenciable en a. □

Teorema 3.5. *Consideremos una función $f\colon U \to V$, cuyo dominio es un abierto U de un producto de espacios de Banach $E_1 \times \cdots \times E_n$ y cuyo codominio es un abierto V de un espacio de Banach F. Para que f sea de clase C_1 es necesario y suficiente que existan las diferenciales parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y que las funciones*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathcal{L}(E_i, F)$$

sean continuas.

Proof. La necesidad se sigue inmediatamente de la Observación 2.6, y la suficiencia del Teorema 3.4 y el Corolario 2.7. □

Definición 3.6. *Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y V un abierto de F. Una función $f\colon U \to V$ es un* difeomorfismo *si es diferenciable, biyectiva y $f^{-1}\colon V \to U$ es diferenciable. Un difeomorfismo $f\colon U \to V$ es un* difeomorfismo C^1 *si f y f^{-1} son C^1.*

Damos el siguiente muy importante resultado sin demostración. Para una prueba ver http://www.math.jhu.edu/ jmb/note/invfnthm.pdf.

Teorema 3.7 (Teorema de la función inversa)**.** *Sean E y F espacios de Banach, $U \subseteq E$ un abierto, a un punto de U y $f\colon U \to F$ una función de clase C^1. Si $\mathrm{D} f(a)$ es inversible, entonces existe un entorno abierto W de a tal que $f(W)$ es abierto y $f\colon W \to f(W)$ es un difeomorfismo C^1.*

Teorema 3.8 (Teorema de la función implícita)**.** *Sean E_1, E_2 y F espacios de Banach, U un abierto de $E_1 \times E_2$ y $f\colon U \to F$ una función de clase C^1. Si*

$$f(a,b) = c \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)\colon E_2 \to F \text{ es inversible,}$$

entonces existen un entorno abierto V de (a,b) incluído en U, un entorno abierto W de a en E_1 y una función $g\colon W \to E_2$ de clase C^1 tales que

$$f(x, g(x)) = c \qquad \text{para todo } x \in W$$

e

$$y = g(x) \qquad \text{para todo } (x,y) \in V \text{ tal que } f(x,y) = c.$$

Proof. Sea $h\colon U \to E_1 \times F$ la función definida por $h(x,y) := (x, f(x,y))$. Un cálculo directo muestra que h es de clase C^1 con

$$\mathrm{D}\, h(x,y)(u,v) = \bigl(u, \mathrm{D}\, f(x,y)(u,v)\bigr) = \left(u, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x,y)(u) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x,y)(v)\right).$$

En consecuencia $\mathrm{D}\, h(a,b)$ es inversible con

$$\mathrm{D}\, h(a,b)^{-1}(u,v) = \left(u, \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)^{-1}\left(v - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)(u)\right)\right).$$

Por el Teorema de la función inversa hay un entorno abierto V de (a,b), incluído en U, tal que $h(V)$ es abierto y $h\colon V \to h(V)$ es un difeomorfismo de clase C^1. Denotemos con l a la inversa de h. Entonces

$$(x,y) = l \circ h(x,y) = l(x, f(x,y)) = (x, p_2 \circ l(x, f(x,y))) \quad \text{para todo } (x,y) \in V,$$

donde $p_2 = E_1 \times E_2 \to E_2$ es la proyección canónica. El conjunto $W := \{x \in E_1 : (x,c) \in h(V)\}$ es abierto porque es la preimagen de $h(V)$ por la función continua $i\colon E_1 \to E_1 \times F$, dada por $x \mapsto (x,c)$, y $a \in W$ porque $(a,c) \in h(V)$. La función $g = p_2 \circ l \circ i$ es de clase C^1 porque es composición de funciones de clase C^1, y satisface las condiciones pedidas en el enunciado. En efecto,

$$f(x, g(x)) = f(x, p_2 \circ l(x,c)) = c \quad \text{para todo } x \in W,$$

por la misma definición de h y porque l es la inversa de h, y si $(x,y) \in V$ y $f(x,y) = c$, entocnes,

$$h(x,y) = (x, f(x,y)) = (x,c) \Rightarrow (x,y) = l(x,c) = (x, p_2 \circ l(x,c)) = (x, g(x)),$$

y por lo tanto $y = g(x)$. □