

1	2	3	4

CALIFICACIÓN

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA:

Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre 2025
Recuperatorio Primer Parcial - 7/07/2025

1. Demostrar que para todo z en $\mathbb{C}$ con $|z| = 1$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{(1+z)^2}{7z} \right)^n dz = \frac{7}{5z - 1 - z^2}$$

y justificar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \left(\frac{(1+z)^2}{7z} \right)^n dz = \int_{|z|=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{(1+z)^2}{7z} \right)^n dz.$$

2. Demostrar que para todo entero no negativo n se tiene que

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz$$

y usar esto y el ejercicio anterior para calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{2n}{n}.$$

3. Hallar todas las $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas con $f'(\frac{1}{n}) + f(\frac{1}{n}) = 0$ para todo entero $n > 0$.
4. Sea $f : \{z : \text{Im}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $f(i) = 0$ y $|f(z)| < 1$ para todo z , probar entonces que se tiene

$$|f(2i)| \leq 1/3$$

y hallar todas las funciones f para las que se da la igualdad.