Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica 7

Teorema de los Residuos

1. Calcular

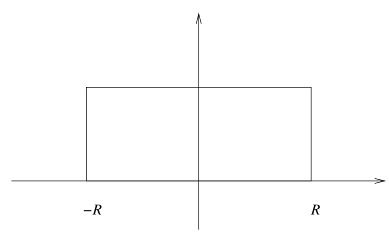
$$a)\ \int_C \frac{z^2+3z-1}{z^4-2}\,dz, \qquad b)\ \int_C \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z}\,dz, \qquad c)\ \int_C \frac{e^{z+\frac{1}{z}}}{1-z^2}dz.$$

donde C denota el borde de la circunferencia $\{z : |z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo.

2. Para $0 < a < 1$, calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$$

integrando en el rectángulo:



de altura $2\pi i$.

3. Sea $F : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales tal que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zF(z) = 0$, probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}(F(z), z_k).$$

y usar esto para calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx, \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx, \qquad c)\ \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,dx.$$

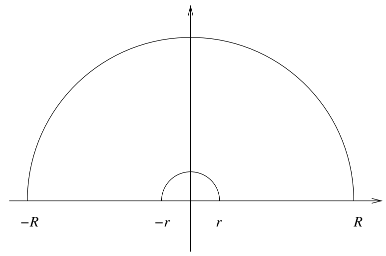
4. Sea $F : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales tal que $\lim\limits_{|z|\to\infty} F(z) = 0$, probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}(F(z)e^{iz}, z_k).$$

y usar esto para calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\ \int_0^{\infty} \frac{x\ \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx.$$

5. Sea $F : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales salvo en el origen donde tiene a lo sumo un polo simple y tal que $\lim\limits_{|z|\to\infty} F(z) = 0$, probar integrando sobre curvas del tipo



que el *valor principal*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{ix}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to 0^+}} \left(\int_{-R}^{-r} F(x)e^{ix}\,dx + \int_{r}^{R} F(x)e^{ix}\,dx \right)$$

coincide con

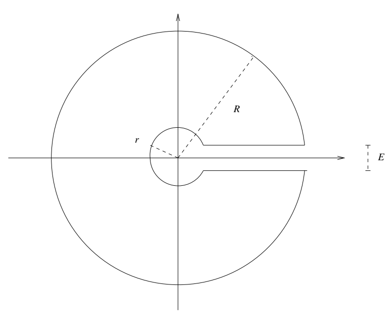
$$\pi i \operatorname{Res}(F(z)e^{iz}, 0) + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}(F(z)e^{iz}, z_k).$$

6. Probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \qquad \text{y} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

7. Si $a \neq 0$ es real, probar que la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2}\,dx$ converge y calcularla.

8. Sea $F : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos en $[0, +\infty)$ y tal que $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, probar integrando sobre curvas del tipo



que para todo $\alpha \in (0, 1)$ se tiene

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^{\alpha}}\,dx = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z^{\alpha}}, z_k \right),$$

donde z^{α} es la unica rama definida en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ que toma argumentos en $(0, 2\pi)$.

9. Calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx, \qquad b)\ \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)}\,dx, \qquad c)\ \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x}\,dx.$$

10. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \widehat{\mathbb{R}}$ una función racional cuyo denominador no se anula sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1. Definiendo $R : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ como

$$R(z) = \frac{1}{z} Q\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right),$$

probar la igualdad

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx = 2\pi \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}(R(z), z_k)$$

integrando sobre $\{|z| = 1\}$ con la parametrización $z = e^{ix}$, $0 \le x \le 2\pi$.

11. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos x)^2}\, dx$ para $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < b < a$,

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{1 - 2a\cos x + a^2}\, dx$ para $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 1$.

12. Probar que $p(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva de módulo menor que 1 y que el resto de las raíces están contenidas en la región $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

13. Probar que $p(z) = z^5 + 15z + 1$ tiene una única raíz en la región $\{z : |z| < \frac{3}{2}\}$ y decidir si tiene alguna otra raíz contenida en la región $\{z : |z| \ge 2\}$.

14. Si $\alpha > 1$ probar que la ecuación $z^n e^{\alpha - z} = 1$ tiene exactamente n raíces en $\{z : |z| < 1\}$.

15. Sea $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa y tal que $f(z + 3i) = f(z + 1) = f(z)$ para todo z. Probar que si la función dada no tiene ceros ni polos en el rectángulo de vértices 0, 1, $1 + 3i$ y $3i$ entonces la cantidad de ceros en el interior es igual a la cantidad de polos, contando ambos con multiplicidad.