Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica 5

Liouville, Principio de Identidad y Modulo Maximo

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo z con $|z| > 1$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

2. Probar que si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica entonces es constante o es sobreyeciva.

3. Dados ω_0, ω_1 en $\mathbb{C}$ que son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, probar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y satisface
$$f(z + \omega_0) = f(z + \omega_1) = f(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$
entonces es constante.

4. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa no idénticamente nula.
   a) Probar que para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.
   b) Probar que el conjunto de ceros de f es discreto y concluir que f tiene un número finito de ceros en cada compacto $K \subset \Omega$.

5. Hallar las $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Hallar las $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3-2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Hallar las $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que
$$n^2 \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

8. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con Ω un abierto conexo que es simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ y tal que
$$f(z) \in \mathbb{R} \text{ para todo } z \in \Omega \cap \mathbb{R}$$
entonces se tiene
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \text{ para todo } z \in \Omega.$$

9. Dar un ejemplo de $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$ holomorfa que tenga numerables ceros que se acumulen en un punto del borde de la circunferencia unitaria. ¿Contradice esto algún resultado conocido?

10. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfas nunca nulas con Ω un abierto conexo y $(a_n)_n$ una sucesión que converge a un punto de Ω. Probar que si
$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
entonces la función $f(z) = c \cdot g(z)$ para alguna constante c en $\mathbb{C}$.

11. Sea f entera con la siguiente propiedad:

$$\text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{(n)}(z) = 0.$$

 Probar que f es un polinomio.

12. Sea Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^2$. Probar que en $\overline{\Omega}$ el producto de las distancias a n puntos dados alcanza su valor máximo en un punto en el borde $\partial\Omega$.

13. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq \left|e^z - \frac{1}{2}\right|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

14. Sean C un cuadrado en $\mathbb{C}$ y f una función continua en C y holomorfa en el interior de C. Probar que si f se anula en uno de los lados de C entonces f es constante.

15. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, holomorfa en Ω y no constante tal que $|f|$ es constante sobre $\partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ con $f(z) = 0$.

16. Formular y demostrar el "principio del módulo mínimo" para funciones holomorfas.

17. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfa. Probar que si existen $a, b \in B(0,1)$ distintos entre sí con $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo z en $B(0,1)$.

 Sugerencia: considerar la función

$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)} \quad \text{con} \quad h(z) = f\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$

 y usar el Lema de Schwarz.

18. Sean $f, g : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorfas y biyectivas. Probar que si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B(0,1)$ entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en $B(0,1)$.

19. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(1,4)$ que verifican $f(0) = 3$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

20. Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ una función holomorfa que verifica $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo z en $B(0,1)$.

21. Hallar todas las funciones holomorfas $f : B(0,1) \to B(0,2)$ que verifican $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.