

ANÁLISIS COMPLEJO

PRIMER CUATRIMESTRE 2025

PRÁCTICA 4

INTEGRACIÓN Y FORMULA DE CAUCHY

1. Probar que la integral de una función a lo largo de una curva suave a trozos, no depende de la parametrización de la curva, sólo depende de su orientación.
2. Probar que si una función tiene una primitiva holomorfa entonces su integral a lo largo de una curva suave a trozos sólo depende de los extremos de la curva pero no de la curva.
3. Probar que si $(f_n)_n$ converge uniformemente a f entonces $\int_{\gamma} f_n dz \rightarrow \int_{\gamma} f dz$ para toda γ .
4. Calcular la integral de

- a) $\bar{z} + 1$ a lo largo del borde del círculo centrado en el origen de radio 2,
- b) $\cos z$ a lo largo del borde del semicírculo centrado en el origen de radio 1,
- c) $\bar{z}z^2$ a lo largo del borde del triángulo con vértices $-5, -2 + 3i$ y 3 ,
- d) $1/z$ a lo largo del borde de la elipse centrada en el origen que pasa por $-2, 2, -3i$ y $3i$.

5. Probar la fórmula más importante del análisis complejo que dice que para todo entero n se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 1 & \text{si } n = -1 \end{cases} \quad \text{con } \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \gamma(t) = e^{it}.$$

6. Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \quad \text{con } \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \gamma(t) = 2|\cos(2t)|e^{it}.$$

7. Probar que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z^2} dz \right| \leq \pi \frac{1+e}{2} \quad \text{con } \gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \gamma(t) = e^{it}.$$

8. Probar que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad \text{con } \gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \gamma_r(t) = re^{it}.$$

9. Probar que si la serie de potencias $\sum a_n z^n$ define una función holomorfa del disco unitario centrado en el origen en sí mismo entonces se tiene la desigualdad $|a_n| \leq 1$ para todo n .

10. Calcular las integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 4e^{it}$,

b) $\int_{\gamma} \frac{z}{z+1} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{it}$,

c) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$,

d) $\int_{\gamma} \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \frac{2}{3}e^{it}$,

e) $\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz$ para $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{it}$.

11. Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{\log z}{z-1} + \frac{z \log z}{(z-e)^2} dz \text{ para } \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \gamma(t) = 2 + \frac{3}{2}e^{it}$$

donde $\log z$ es la rama principal del logaritmo.

12. Probar que la fórmula de Cauchy vale en el borde, mas precisamente, probar que si se tiene una función continua $f : \{z : |z| \leq r\} \rightarrow \mathbb{C}$ que es holomorfa en el interior del disco entonces vale la igualdad

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \text{ con } \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \gamma(t) = re^{it}.$$

13. Probar que si una sucesión de funciones holomorfas converge uniformemente sobre compactos a una función f , entonces el límite es una función holomorfa y la sucesión que se obtiene derivando termino a termino la sucesión original converge uniformemente sobre compactos a f' .

14. Si $\varphi : \gamma \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y derivable en la segunda variable, con derivada continua en ambas, probar que la función

$$f(z) = \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw \text{ es holomorfa con } f'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z) dw.$$

15. Probar que $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2} dt$ define una función holomorfa en $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.

16. Probar que en un abierto simplemente conexo del plano complejo, toda función holomorfa tiene una primitiva. ¿Es necesaria la hipótesis de que el abierto sea simplemente conexo?

17. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa nunca nula con Ω un abierto simplemente conexo.

a) Si $f(z_0) = e^{w_0}$, demostrar que existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $f = e^g$ y $g(z_0) = w_0$.

b) Demostrar que $g' = f'/f$ y deducir que g es única.

18. Sean $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas tales que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo z , demostrar que existe una función $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$.

Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$ y entonces $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

19. Probar que en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, toda curva suave es homotópica a una suave contenida en el círculo unitario y que a su vez para toda curva suave contenida en el círculo unitario existe un número entero n de forma que es homotópica a la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{nit}$.

20. Dada una curva cerrada γ definimos el *índice de la curva con respecto a un punto w* como el número

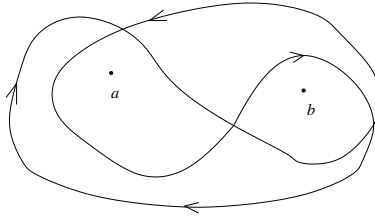
$$\eta(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w},$$

que sólo depende de la curva y su orientación.

Demostrar que el índice de la curva respecto a w es un número entero que es localmente constante en el complemento de la curva y que se anula si $|w| > |z|$ para todo z en la curva.

21. Deducir de los dos ejercicios anteriores que cualesquiera dos curvas cerradas y suaves que no pasan por el punto a , son homotópicas en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ si y sólo si tienen el mismo índice.

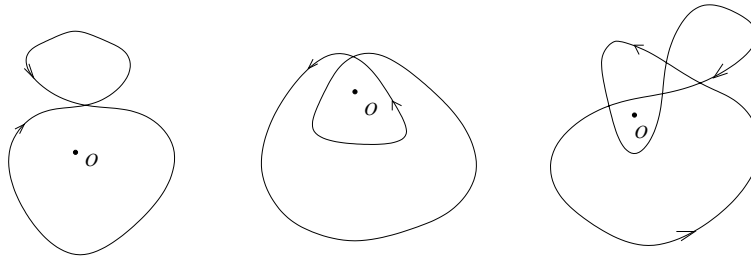
22. Probar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$ donde γ es una curva que se ve así:



y que la curva γ no es homotópica en el abierto conexo $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ a una curva constante.

23. Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$ para γ una curva suave, simple y cerrada que no pasa por i ni por $-i$.

24. Calcular $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$ para la siguientes curvas



25. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, probar la siguiente generalización de la fórmula de Cauchy para curvas cerradas diferenciables a trozos

$$\frac{\eta(\gamma, z)}{n!} f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$