Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre 2025

Práctica 3
Series y Funciones Analíticas

1. Estudiar la convergencia de las series de término general

   a) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$,

   b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,

   c) $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

   d) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$,

   e) $a_n = \dfrac{1}{n\log(n)}$

   f) $a_n = \dfrac{1}{n\log^2(n)}$

2. Hallar los valores de z para los cuales resultan convergentes las series:

   a) $\sum \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,

   b) $\sum \frac{1}{n+|z|}$,

   c) $\sum \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,

   d) $\sum \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$,

   e) $\sum \frac{3^n}{nz^n}$,

   f) $\sum \frac{e^{nz}}{n^2}$,

   g) $\sum \frac{e^{inz}}{n+1}$,

   h) $\sum \frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$,

   i) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)^n$.

3. Demostrar que si una serie de números complejos converge absolutamente entonces cualquier reordenamiento de sus terminos da una serie que converge al mismo valor.

4. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ en $\mathbb{C}$ tales que $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ converge, probar que

$$\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})b_n \text{ converge si y sólo si } \sum_{n\geq 0} a_{n+1}(b_{n+1}-b_n) \text{ converge.}$$

5. Probar que si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos, entonces se tienen los siguientes criterios de convergencia de Abel y Dirichlet:

   a) la serie $\sum a_n z_n$ converge si $\sum z_n$ converge,

   b) la serie $\sum a_n z_n$ converge si $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas y $\lim a_n = 0$.

6. Probar los criterios de Du Bois-Reymond y Dedekind que dicen que los criterios del ejercicio anterior siguen valiendo si la sucesión decreciente de números reales no negativos se reemplaza por cualquier sucesión de números complejos tales que la serie $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

7. Dados $\{a_{m,n}\}$ en $\mathbb{C}$ tales que $\lim_m a_{m,n} = a_n$ y $|a_{m,n}| \leq b_n$ para todo n con $\sum b_n$ convergente, demostrar que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

8. Probar que para todo z se tiene que

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots .$$

9. Calcular los radios de convergencia de las siguientes series de potencias y para cada una de ellas estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

   a) $\sum \frac{1}{n} z^n$,

   b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,

   c) $\sum \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,

   d) $\sum \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,

   e) $\sum n! z^{n^2}$,

   f) $\sum z^{n!}$,

   g) $\sum \operatorname{sen}(n) z^n$,

   h) $\sum \frac{1}{2^n} z^{n^2}$,

   i) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

10. Dadas $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ con radio de convergencia positivos, las series definidas por las siguientes formulas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n$$

tienen radio de convergencia mayor o igual al mínimo de los radios de las series originales y para esos valores convergen a la suma y el producto de las series originales.

11. Probar el M-test de Weierstrass que dice que dado un conjunto X y funciones $f_n : X \to \mathbb{C}$ con la propiedad de que existen constantes M_n tales que

$$|f_n(x)| \leq M_n \text{ para todo } x \text{ en } X \text{ y la serie } \sum M_n \text{ converge}$$

entonces $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en el conjunto X.

12. Dada una serie de potencias $\sum a_n z^n$ con radio de convergencia $\rho > 0$, definimos la función asociada

$$f : B_\rho(0) \to \mathbb{C} \text{ dada por } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

probar que f es holomorfa e infinitamente derivable y sus derivadas son las funciones asociadas a derivar la serie lugar a lugar y tienen el mismo radio de convergencia.

13. Dada la serie de potencias $\sum a_n z^n$, probar que si converge para $z = z_0$ entonces converge al límite radial en el sentido de que

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

donde en lado izquierdo el límite se toma con r tomando valores en el intervalo $[0, 1]$.

14. Probar que

$$\log 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots .$$

15. Probar que la serie

$$z^3 - z^6 + \frac{1}{2} z^9 - \frac{1}{2} z^{18} + \cdots + \frac{1}{n} z^{3^n} - \frac{1}{n} z^{2 \cdot 3^n} + \cdots$$

converge en $z = 1$ pero es no acotada alrededor de cualquier punto de la forma $e^{\pi i / 3^n}$.

16. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ infinitamente derivable, su desarollo en serie alrededor de un punto z_0 es la serie de potencias

$$f(z_0) + \frac{f^{(1)}(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f^{(2)}(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots .$$

Probar que son equivalentes

  a) todo z_0 tiene un entorno en donde la serie de arriba converge puntualmente a $f(z)$,
  b) todo z_0 tiene un entorno en donde $|f^{(n)}(z)| \leq n!C^{n+1}$ para todo $n \geq 0$ y algun $C > 0$,

y en este caso se dice que la función f es analítica.

17. Probar que para toda serie de potencias de variable compleja, la función que define dentro de su radio de convergencia es una función analítica.

18. Probar que la suma y el producto de analíticas es analítica y lo mismo para el cociente de funciones analı́ticas nunca nulas. Calcular el desarollo en serie alrededor del origen de $1/1 - z$.

19. Probar que la composición de funciones analíticas es analítica y que si una función analítica admite inversa entonces su inversa también es analítica.

20. La función exponencial $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se define como la función analítica asociada a la serie formal

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots ,$$

probar que se tiene la fórmula

$$\exp(z_0 + z_1) = \exp(z_0) \cdot \exp(z_1) \text{ para todos } z_0, z_1 \text{ en } \mathbb{C}$$

y que la función exponencial es su propia derivada.

21. Las funciónes trigonómetricas cos,sen : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se definen como las funciónes analíticas asociadas a las series formales

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} + \cdots \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1!} + \cdots ,$$

probar que

$$\exp(iz) = \cos(z) + \operatorname{sen}(z)i,$$

deducir las formulas para el coseno y seno de la suma de dos angulos y calcular sus derivadas.

22. Una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice una *rama del logaritmo* si $\exp(f(z)) = z$, probar las siguientes afirmaciones

  a) en todo abierto convexo que no contenga el origen hay ramas del logaritmos
  b) en todo abierto conexo, cualesquiera dos ramas del logaritmo difieren en una constante,
  c) si hay ramas del logaritmo entonces $\{z : |z| = 1\}$ no está contenido en Ω
  d) toda rama del logaritmo es holomorfa.

23. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo como en el ejercico anterior, dados a en Ω y b en $\mathbb{C}$ se define la exponenciación
$$a^b = \exp(b \cdot f(a)),$$
probar que

   a) para todo entero n, la exponenciación a^n calcula el valor usual,
   b) para todo entero n, la función $z \mapsto z^{1/n}$ es una rama de la raiz n-esima,
   c) las funciones dadas por $z \mapsto z^b$ y $z \mapsto a^z$ son holomorfas y calcular sus derivadas.

24. La *rama principal del logaritmo* es la única rama $\log : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ con $\log(1) = 0$, probar que se tiene la igualdad
$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \cdots .$$

25. La *función Zeta de Riemann* se define como
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
donde n^s se calcula usando la rama principal del logaritmo.

   a) Probar que la serie converge uniformemente en cada semiplano $\{\mathrm{Re}(s) \geq 1+\varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$.
   b) Probar que la serie converge a una función holomorfa en el semiplano $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.
   c) Probar que si $\mathrm{Re}(s) > \epsilon > 0$ entonces
$$\left|\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx\right| = \left|\int_n^{n+1} \int_n^x \frac{s}{u^{s+1}} du dx\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|s|}{n^{1+\epsilon}},$$
   d) Probar que
$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx$$
   define una función holomorfa en $\mathrm{Re}(s) > 0$.