Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica 2

Ecuaciones de Cauchy-Riemann y Funciones Holomorfas

1. Para cada una de las siguientes funciones analizar dónde son derivables, dónde son holomorfas y calcular su derivada:

   a) $f(z) = \overline{z}$

   b) $f(z) = z^3 - 2z$,

   c) $f(z) = z^2\,\overline{z}$,

   d) $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$,

2. Demostrar que la suma, producto y composición de funciones holomorfas es holomorfa.

3. Probar que vale *la regla de L'Hopital* para cocientes de funciones holomorfas.

4. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con Ω un abierto de $\mathbb{C}$, consideremos la descomposición canónica de f en parte real e imaginaria

$$f(x+iy) = u(x,y) + v(x,y)i \quad \text{con} \quad u, v : \Omega \to \mathbb{R},$$

   luego,

   a) probar que f es continua en $x_0 + y_0 i$ si y sólo si u y v son continuas en (x_0, y_0),

   b) probar que f es derivable en $x_0 + y_0 i$ si y sólo si u y v son derivables en (x_0, y_0) y se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),$$

   y calcularlas en función de la derivada de la función compleja.

5. Probar que en $z = 0$ las derivadas parciales de la siguientes función existen y verifican las ecuaciones del ejercicio anterior pero la función no es derivable:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } z = x + iy \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si } z = x + iy = 0. \end{cases}$$

6. Con la notación anterior, demostrar que la función f es holomorfa si y sólo si u y v son derivables y se verifican las ecuaciones anteriores en todo punto del dominio y usar esto para analizar en cada una de las siguientes funciones dónde son derivables y dónde son holomorfas:

   a) $f(z) = y + ix$,

   b) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,

   c) $f(z) = x^2 + iy^2$,

   d) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

7. Dada $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2, una *conjugada armónica* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función C^2 tal que se verifique

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Probar que

a) cualesquiera dos conjugadas armónicas de la misma función difieren en una constante,

b) si una función u admite una conjugada armónica v entonces las dos son armónicas, es decir que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

c) las curvas de nivel de dos conjugadas armónicas se cortan de manera ortogonal.

8. Decidir si las siguientes funciones admiten conjugadas armónicas y en caso afirmativo calcular su función holomorfa asociada:

i) $u(x, y) = x^2 - y^2$, *ii*) $u(x, y) = x^2y^2$, *iii*) $u(x, y) = 2x(1 - y)$.

9. Probar que si una función f es holomorfa y tiene derivada no nula en un punto z_0, entonces para cualesquiera dos curvas suaves que se cortan en z_0 con ángulo α, su imágen por la función son dos curvas suaves que se cortan en $f(z_0)$ con ángulo también igual a α.

10. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, demostrar que si f verifica cualquiera de las siguientes condiciones entonces es constante

a) la función $\mathrm{Re}(f)$ es constante,

b) la función $|f|$ es constante,

c) la función $\overline{f}$ es holomorfa,

d) la imágen de f está contenida en una unión finita de rectas

11. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifican $f(x + iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi$.

12. Un biholomorfismo es una función holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$ que admite una función inversa que también es holomorfa. Dar un biholomorfismo entre

$$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\} \;\; \text{y} \;\; \mathcal{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

y más aún, probar que el centro del disco se puede mandar a cualquier punto del semiplano.

13. Probar el teorema de la función inversa que dice que si una función holomorfa con derivada continua tiene derivada no nula en un punto, entonces la función se restringe a un biholomorfismo entre un entorno del punto y un entorno de la imágen del punto.

14. Una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice una *rama de la raíz n-ésima* si $f(z)^n = z$, probar las siguientes afirmaciones

a) en toda bola abierta en $\mathbb{C}^\times$ hay exactamente n ramas de la raíz n-ésima,

b) en el abierto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ hay exactamente n ramas de la raíz n-ésima,

y que en general, toda rama de la raiz n-ésima es una función holomorfa.