Práctica 7

1. Sea A un conjunto, y sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $f : A \to Y$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$.

Pruebe que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a f si y solo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1} \subseteq A$ tales que

$$d\left(f_{n_k}(a_k), f(a_k)\right) \geq \alpha \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

2. Analice la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.
(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.
(c) $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$.
(d) $f_n : C([0, 1]) \to C([0, 1]),\ f_n(\varphi) = \frac{n}{n+1}\,\varphi$.

Aquí en $C([0, 1])$ consideramos la distancia d_∞.

3. (a) Encuentre el límite puntual de la sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$.
ii. $f_n(x) = x^{-n}e^x$, $A = (1, +\infty)$.
iii. $f_n(x) = n^2x\,(1 - x^2)^n$, $A = [0, 1]$.
iv. $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $A = \mathbb{R}$.

(b) Para la sucesión de **i.**, pruebe que la convergencia es uniforme sobre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, y para la de **ii.**, que es uniforme sobre $[2, 5]$.

(c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre A en alguno de los casos?

4. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$, muestre que $f \in B(X)$. ¿Sigue valiendo esto si la convergencia es solamente puntual?

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, muestre que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada*, o es *acotada* en $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$.

5. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}.$$

Estudie la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f_n')_{n\geq 1}$.

6. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1} : X \to \mathbb{R}$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente a funciones $f, g : X \to \mathbb{R}$, respectivamente. Pruebe que:

(a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg.

7. Sean X, Y espacios métricos, y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to Y$. Pruebe que f es uniformemente continua.

8. Sea $(f_n)_{n\geq 1} : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables que converge puntualmente a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pruebe que si existe $c > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq c$ para todo $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.
