Práctica 6

1. Pruebe que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ definen normas en $\mathbb{R}^n$, donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

2. Sea E un espacio normado. Pruebe que se verifican:

(a) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

(b) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$.

(c) Si $y, z \in B(x,r)$ entonces para todo $t \in [0,1]$, $ty + (1-t)z \in B(x,r)$ (es decir, toda bola es *convexa).*

3. Sea E un espacio normado. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x_0 \in E$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Pruebe que si definimos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ por

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$.

4. Sea E un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Pruebe que:

(a) $\overline{S}$ también es un subespacio.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

(c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

(d) Si S es un hiperplano, entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

5. Sea $\mathbb{R}_n[t]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$. Consideremos para $p \in \mathbb{R}_n[t]$ las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)|\, dt.$$

(a) ¿Son $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$ espacios de Banach? ¿Por qué?

(b) Justifique por qué ambas normas resultan equivalentes en $\mathbb{R}_n[t]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $\mathbb{R}[t]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, pruebe que ahí las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el ítem anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta n para todo $n \in \mathbb{N}$?

6. Definimos ℓ^∞ como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

(a) Pruebe que la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^∞ no es compacta.

(b) Pruebe que no hay ningún conjunto numerable denso en ℓ^∞.

7. Sea $E \subseteq \ell^\infty$ el (sub)espacio normado definido como

$$E = \{a \in \ell^\infty \ : \ \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\},$$

dentro del cual consideramos el subespacio

$$S = \left\{ a \in E \ : \ \sum_{n\geq 1} a_n = 0 \right\}.$$

Pruebe que S es denso en E.

8. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Pruebe que son equivalentes:

(a) T es continuo en 0.

(b) Existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.

(c) T es continuo.

(d) T es uniformemente continuo.

(e) T es acotado.

(f) Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

9. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados, y sea $T : E \to F$ lineal y continuo. Verifique las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

10. Consideremos en $C([0,1])$ las normas

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad \text{y} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Sean $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ las funcionales lineales definidas por

$$\mathcal{E}f = f(0), \qquad \mathcal{I}f = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Decida, para cada una de las normas, si cada una de las funcionales es continua; en caso afirmativo, acote su norma.

11. Consideremos en $C([0,1])$ la norma infinito. Fijada $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, sea $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy.$$

Pruebe que K es lineal y continua. Acote su norma.

12. Sea $\mathbb{R}[t]$ el espacio de polinomios, con la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida en el Ejercicio 5. Sea $\delta : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ dado por $(\delta p)(t) = p'(t)$, donde p' denota el derivado de p. Probar que δ es un operador lineal que no es continuo.

13. Sea ℓ^2 el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \Big\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty\Big\}.$$

Para $a \in \ell^2$ definimos

$$\|a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

(a) ¿Es compacta la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^2?

(b) Pruebe que $\gamma : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es una funcional lineal continua.

Sugerencia: use la desigualdad de Cauchy-Schwarz.