

## Práctica 4

1. Decida cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a)  $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_2)$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

(b)  $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_2)$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\frac{1}{2}x^2 + (x-1)^2 y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(c)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ , la función identidad.

(d)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$ , la función identidad.

Aquí  $d_2$  es la métrica euclídea usual, y  $\delta$  es la métrica discreta.

¿Cambia algo si en lugar de  $d_2$  consideramos  $d_1$  o  $d_\infty$ ?

2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pruebe que  $f$  es continua únicamente en  $x = 0$ .

3. Sea  $E$  un espacio métrico, y sea  $x_0 \in E$ . Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $x_0$ . Pruebe que si  $f(x_0) > 0$  entonces existe  $r > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in B(x_0, r)$ .

4. Sean  $E$  y  $E'$  espacios métricos y  $f, g : E \rightarrow E'$  funciones continuas.

(a) Pruebe que  $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$  es abierto.

(b) Deduzca que  $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$  es cerrado.

5. Considerando en cada  $\mathbb{R}^n$  la métrica euclídea  $d_2$ , pruebe que:

(a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$  es cerrado.

(b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$  es cerrado.

(c)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$  es abierto.

¿Cambia algo si en lugar de  $d_2$  consideramos las métricas  $d_1$  o  $d_\infty$ ?

6. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ . Pruebe que:

(a)  $f$  es continua, y sin embargo existe  $G \subseteq \mathbb{R}$  abierto tal que  $f(G)$  no es abierto.

(b)  $g$  es continua, y sin embargo existe  $F \subseteq \mathbb{R}$  cerrado tal que  $g(F)$  no es cerrado.

7. Sean  $E$  y  $E'$  espacios métricos y  $f, g : E \rightarrow E'$  funciones continuas.
- Sea  $D \subseteq E$  un subconjunto denso. Pruebe que si  $f|_D = g|_D$ , entonces  $f = g$ .
  - Concluya que la función  $\mathcal{R} : C([0, 1]) \rightarrow \{f : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  dada por  $\mathcal{R}(f) = f|_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$  es inyectiva.
8. Sean  $E$  y  $E'$  espacios métricos y  $f : E \rightarrow E'$  una función continua y suryectiva. Pruebe que si  $D$  es denso en  $E$  entonces  $f(D)$  es denso en  $E'$ .
9. Consideramos las funciones  $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \quad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- Demuestre que si utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_\infty$  ambas resultan continuas.
  - Demuestre que si en cambio utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_1$ ,  $\mathcal{I}$  es una función continua pero  $\mathcal{E}$  no lo es.
  - Analice si es posible que una función  $\mathcal{F} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  sea continua para la distancia  $d_1$  pero no para  $d_\infty$ .
10. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico.
- Sea  $x_0 \in E$ , y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = d(x, x_0)$ . Pruebe que  $f$  es continua.
  - Usando esto rehaga los items (b), (d) y (g) del Ejercicio 4 de la Práctica 3.
11. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico.
- Sea  $A \subseteq E$ , y sea  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = d(x, A)$ .
    - Pruebe que  $g$  es continua.
    - Pruebe que si  $A$  es cerrado entonces  $g(x) > 0$  para todo  $x \notin A$ .
  - Sean  $A, B \subseteq E$  cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea  $h : E \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Pruebe que  $h$  es continua, y que  $h(x) = 0 \forall x \in A$  y  $h(x) = 1 \forall x \in B$ .

- Sean  $A, B \subseteq E$  cerrados, no vacíos y disjuntos. Pruebe que existen conjuntos abiertos y disjuntos  $U$  y  $V$  tales que  $A \subseteq U$  y  $B \subseteq V$ .
- Nota: esta última afirmación está comprendida en el llamado *Lema de Urysohn*.
12. Pruebe que las funciones  $f$  y  $g$  de los ejercicios 10 y 11 son de tipo Lipschitz. Deduzca que son uniformemente continuas.
13. (a) Verifique que la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  no es uniformemente continua en  $(0, +\infty)$ . ¿Y en  $[\varepsilon, +\infty)$  para  $\varepsilon > 0$ ?

- (b) Verifique que la función  $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$  no es uniformemente continua en  $(0, 1)$ .
- 14.** Sean  $E, E'$  espacios métricos y sea  $f : E \rightarrow E'$  una función uniformemente continua. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $E$ . Pruebe que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $E'$ .
- 15.** (a) Dé un ejemplo de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y continua pero no uniformemente continua.  
(b) Dé un ejemplo de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no acotada y uniformemente continua.
- 16.** Sea  $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$  una función uniformemente continua, y sean  $A, B \subseteq E$  conjuntos no vacíos tales que  $d(A, B) = 0$ . Pruebe que  $d'(f(A), f(B)) = 0$ .
-