Práctica 5

Compacidad

1. Sea $K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe, por definición, que K es compacto.

2. Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Pruebe que K tiene mínimo y máximo.

3. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Pruebe que los subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$S = \{x + y : x, y \in K\}, \qquad P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$$

también son compactos.

4. Sea E un espacio métrico y sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de E. Pruebe que si existe $i_0 \in I$ tal que F_{i_0} es compacto, entonces $\cap_{i \in I} F_i$ es compacto.

5. Sea E un espacio métrico. Pruebe que E es compacto si y solo si para toda sucesión $(F_n)_{n \geq 1}$ decreciente (es decir, $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) de cerrados no vacíos de E se tiene que $\cap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$.

6. Sea E un espacio métrico discreto. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de E?

7. Pruebe que la unión de un número finito de conjuntos compactos es compacto.

8. Pruebe que en un espacio métrico (E, d) la distancia de un punto a un compacto *se realiza*. Esto es, que para todo compacto $K \subseteq E$ y para todo $x \in E$ existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.

9. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\widehat{d}$ la función definida en el Ejercicio 11 de la Práctica 3. Pruebe que si $A \subseteq E$ es compacto, $B \subseteq E$ es cerrado y se cumple que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\widehat{d}(A, B) > 0$. ¿Sucede lo mismo si A es solo cerrado?

10. Consideremos en $(C[0,1], d_\infty)$ la función f_0 nula. Pruebe que $\overline{B(f_0, 1)}$ no es compacta (pero sí es cerrada y acotada). ¿Qué pasa si cambiamos d_∞ por d_1?

11. Sea E un espacio métrico compacto, y sea $f : E \to (0, +\infty)$ una función continua. Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in E$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Pruebe que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

13. Sean E y E' espacios métricos y $f : E \to E'$ continua. Pruebe que si E es compacto y f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Teoremas de punto fijo

14. Sea E un espacio métrico y sea $f : E \to E$ continua. Pruebe que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(x) + 3$. Pruebe que f es una contracción.

16. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : E \to E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Pruebe que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?

17. Sea E un espacio métrico y sea $f : E \to E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \to E$ a la función $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces). Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Si $x \in E$ es punto fijo de f, entonces es punto fijo de f^n.

(b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E.

Sugerencia: pruebe que si $x \in E$ es punto fijo de f^n, entonces $f(x)$ también lo es.

(c) Deduzca que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

18. Considere en $\mathbb{R}^n$ la métrica d_2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Supongamos que existe $M > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B(0, M)$ tal que $d_2(x, f(x)) < \varepsilon$.

Pruebe que f tiene un punto fijo.

19. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Pruebe que f tiene un punto fijo.

Sugerencia: use el teorema de Bolzano.
