

# ÁLGEBRA III

## Práctica 7 – Segundo Cuatrimestre de 2025

**Ejercicio 1.** Sea  $K$  un cuerpo y sean  $\alpha$  algebraico sobre  $K$  y  $t$  trascendente sobre  $K$ . Probar que  $m(\alpha, K) = m(\alpha, K(t))$  y que  $[K[\alpha] : K] = [K(t)[\alpha] : K(t)]$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos subextensiones de  $E/K$ . Probar que:

$$\mathrm{trdeg}(L_1 L_2 / K) \leqslant \mathrm{trdeg}(L_1 / K) + \mathrm{trdeg}(L_2 / K).$$

Dar un ejemplo donde no valga la igualdad.

**Ejercicio 3.** Sea  $E$  un cuerpo algebraicamente cerrado y sea  $K$  un subcuerpo. Sea  $\varphi : E \rightarrow E$  un  $K$ -homomorfismo. Probar que si  $\mathrm{trdeg}(E/K) < \infty$  entonces  $\varphi$  es un isomorfismo. Mostrar que esto no vale si  $\mathrm{trdeg}(E/K) = \infty$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $t$  trascendente sobre  $\mathbb{C}$  y sea  $K$  la clausura algebraica de  $\mathbb{C}(t)$ . Probar que  $K \simeq \mathbb{C}$ .

**Ejercicio 5.**

1. Hallar  $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ .
2. Hallar todos los  $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$  tales que  $\sigma(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ .
3. Probar que  $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$  es infinito.

**Ejercicio 6.** Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$  el subcuerpo fijo por un automorfismo de  $\mathbb{C}$ . Probar que cualquier extensión finita de  $K$  es cíclica.

**Ejercicio 7.** ¿Cuáles de las siguientes extensiones son puramente trascendentales? Exhibir un generador en caso afirmativo.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $K\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) / K.$                   | 3. $K\left(t, \sqrt{t^3-t}\right) / K.$                      |
| 2. $\mathbb{Q}\left(t, \sqrt{3-t^2}\right) / \mathbb{Q}.$ | 4. $K\left(t, \sqrt[n]{1-t^n}\right) / K$ , con $n \geq 3$ . |