Álgebra III

Práctica 3 – Segundo Cuatrimestre de 2025

Extensiones normales, separables e inseparables

Ejercicio 1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.

ii) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.

iii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.

iv) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhiba cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

i) $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.

ii) $X^3 - 10$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

iii) $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.

iv) $X^4 + 2$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[i]$.

v) $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - p_i)$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.

vi) $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{F}_7$.

vii) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{F}_5$.

viii) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

ix) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Caracterice los cuerpos de descomposición de los polinomios $x^3 + x^2 + x + 2$ y $x^3 + 2x + 1$ sobre $\mathbb{F}_3$. Pruebe que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

Ejercicio 4. Caracterice los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$. ¿Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 5. Sea E el cuerpo de descomposición de $f \in K[X]$, con $\mathrm{gr}(f) = n$. Pruebe que $[E : K] \mid n!$. Muestre ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

Ejercicio 6. Sean $K \subseteq E \subseteq K[\alpha]$ cuerpos y

$$\mathrm{m}(\alpha, E) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0 \in E[X]$$

el minimal de α sobre E. Pruebe que $E = K[a_{d-1}, a_{d-2}, \ldots, a_0]$.

Ejercicio 7. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

i) Toda extensión finita es normal.

ii) Toda extensión finita está contenida en una extensión finita normal.

iii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.

iv) Todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

v) Si L/K es algebraica, entonces todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

Ejercicio 8. Sea E/K una extensión normal y sea $K \subseteq F \subseteq E$ una subextensión. Pruebe que todo K-morfismo de F en E puede ser extendido a un K-automorfismo de E.

Ejercicio 9. Determine cuáles de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso, calcule $\mathrm{Gal}(E/K)$ y $\mathrm{Hom}_K(E, \overline{K})$.

i) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$.

ii) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$.

iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$.

iv) $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Pruebe que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y solo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 11. Sea K el cuerpo de descomposición de $x^{p^n} - x$ sobre $\mathbb{F}_p$. Calcule $[K : \mathbb{F}_p]$.

Ejercicio 12.

i) Pruebe que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es normal pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es.

ii) Exhiba extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 13. Sea H/K una extensión algebraica y sean E/K y F/K subextensiones normales. Pruebe que EF/K y $(E \cap F)/K$ son normales.

Ejercicio 14. Pruebe que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ vale que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio 15. Determine el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_7$.

Ejercicio 16. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Pruebe que $m(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 17. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E : x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Pruebe que:

i) E_s y E_i son subcuerpos de E.

ii) E es puramente inseparable sobre E_s.

iii) $E_s \cap E_i = K$.

iv) Si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E = E_s E_i$.

Ejercicio 18. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcule el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:

i) $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.

ii) $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

Ejercicio 19. Sea K un cuerpo de característica p, y sean $\alpha, \beta \in \overline{K}$ elementos no nulos tales que α es separable sobre K y β es puramente inseparable sobre K. Pruebe que $K(\alpha,\beta) = K(\alpha+\beta) = K(\alpha\beta)$.

Ejercicio 20. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Pruebe que el grado de inseparabilidad de $K[\alpha]/K$ es p^m con $m = \text{máx}\{k \in \mathbb{N}_0 \ : \ p^k | r\}$.

Ejercicio 21. Sea p un primo impar y sea $f = X^{2p} + uvX^p + v \in K(u,v)[X]$. Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p(u,v)}$ una raíz de f.

i) Pruebe que $\mathbb{F}_p(u,v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u,v)$ no es normal.

ii) Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{F}_p(u,v)$. Calcular $[E : \mathbb{F}_p(u,v)]$.

iii) Pruebe que $[\mathbb{F}_p(u,v)[\alpha] : \mathbb{F}_p(u,v)] = 2p$.

iv) Pruebe que $\mathbb{F}_p(u,v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u,v)$ no es separable ni puramente inseparable.

¿Qué pasa para $p = 2$?

Ejercicio 22. Sean p un primo impar y $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sea α una raiz de $f = x^{p^3} - tx^p + t \in K[x]$. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Halle $[L : K]$.

Ejercicio 23. Sea K un cuerpo de característica p. Dentro de una clausura algebraica $\overline{K}$ de K, definimos $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ \sigma(x) = x \ \forall\, \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)\}$. Pruebe que:

i) Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.

ii) Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ x^{p^n} \in K$ para algún $n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ejercicio 24. Un cuerpo K de característica p se dice *perfecto* si $K^{p^{-\infty}} = K$.

i) Pruebe que todo cuerpo de característica cero es perfecto.

ii) Si K es de característica $p > 0$, pruebe que K es perfecto si y solo si el morfismo $\sigma : K \to K$ dado por $\sigma(x) = x^p$ es un automorfismo.

iii) Pruebe que todo cuerpo finito es perfecto.

iv) Pruebe que si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.

v) Pruebe que $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto y $\overline{K}/K^{p^{-\infty}}$ es separable.

vi) Pruebe que K es perfecto si y solo si toda extensión algebraica de K es separable.

vii) Si K es un cuerpo de característica $p > 0$, pruebe que $K(t)$ no es perfecto.

Ejercicio 25. Sea K un cuerpo y E/K una extensión algebraica.

i) Pruebe que si K es perfecto, entonces E es perfecto.

ii) Pruebe que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.

iii) Pruebe que si E/K es finita y E es perfecto, entonces E/K es separable.

Ejercicio 26.

i) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[x]$ se factoriza linealmente en E. Pruebe que E es algebraicamente cerrado.

ii) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[x]$ tiene al menos una raíz en E. Pruebe que E es algebraicamente cerrado.

$*$ **Ejercicio 27.** Pruebe que $\mathrm{Gal}\,(K(X)/K) \simeq \mathrm{PGL}(2, \mathrm{K})$, donde $\mathrm{PGL}(2, K) := \mathrm{GL}(2, K)/K^{\times}\mathrm{Id}$. *Sugerencia: recuerde el ejercicio* 26 *a) de la guía* 2.