

ÁLGEBRA III

Práctica 2 – Segundo Cuatrimestre de 2025

Extensiones de cuerpos, polinomios minimales, elementos algebraicos y trascendentes

Nota: Con $m(x, K)$ se denotará el polinomio minimal del elemento x sobre el cuerpo K , y con ξ_n una raíz n -ésima primitiva de la unidad.

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión, y sea $x \in E$ algebraico sobre K . Dada una subextensión F/K de E/K , pruebe que $m(x, F)$ divide a $m(x, K)$. Dé ejemplos con $m(x, F) = m(x, K)$ y con $m(x, F) \neq m(x, K)$.

Ejercicio 2. Calcule los siguientes polinomios minimales:

- a) $m(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$. c) $m(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$. e) $m(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}[i])$.
b) $m(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}])$. d) $m(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q})$. f) $m(w, \mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Calcule el grado de las siguientes extensiones:

- a) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]/\mathbb{Q}$. e) $\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{3}}]/\mathbb{Q}$. h) $\mathbb{Q}[\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}]/\mathbb{Q}$.
b) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}]/\mathbb{Q}$. f) $\mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}] / \mathbb{Q}$. i) $\mathbb{Q}[\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}] / \mathbb{Q}$.
c) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$. g) $\mathbb{Q}[\sqrt{4 + \sqrt{15}}] / \mathbb{Q}$. j) $\mathbb{Q}[\sqrt{4 + \sqrt{15}}, \sqrt{4 - \sqrt{15}}] / \mathbb{Q}$.
d) $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. Calcule $\left[\mathbb{Q} \left[\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \right] : \mathbb{Q} \right]$ y $\left[\mathbb{Q} \left[\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}, \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \right] : \mathbb{Q} \right]$.

Ejercicio 5. Sea $E = K[a]$ una extensión finita de un cuerpo K . Para cada $\alpha \in E$ definimos $L_\alpha : E \rightarrow E$ la K -transformación lineal dada por $L_\alpha(x) = \alpha x$.

- i) Pruebe que $m(a, K) = \chi_{L_a} := \det(xI - L_a)$.
ii) ¿Para cuáles $\alpha \in E$ vale que $m(\alpha, K) = \chi_{L_\alpha}$?

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión. Pruebe que E/K es algebraica si y solo si todo anillo A , con $K \subseteq A \subseteq E$, es un cuerpo.

Ejercicio 7. Sea F/K una extensión de cuerpos de grado impar. Pruebe que si $F = K[u]$, entonces $F = K[u^2]$.

Ejercicio 8. Sea $n \in \mathbb{N}$, coprimo con 6, y sea F/\mathbb{Q} una subextensión de \mathbb{C}/\mathbb{Q} de grado n . Pruebe que $[F[\sqrt[3]{2}, i] : F] = 6$.

Ejercicio 9. Sean L/K y M/K dos subextensiones de grado finito de una extensión F/K . Pruebe que:

- i) Si $\text{mcd}([L : K], [M : K]) = 1$, entonces $[L.M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$.
- ii) Si $[L.M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$ entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$. Sea E/K una extensión de grado 2. Pruebe que existe $a \in E$ tal que $E = K[a]$ y $a^2 \in K$. ¿Es esto cierto si K es de característica 2?

Ejercicio 11. Factorice $X^5 + 6X^3 + 15X^2 + 3$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-2})[X]$.

Ejercicio 12. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle$. Calcule $[\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle : K]$.

Ejercicio 13.

- i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcule $m(\xi_p, \mathbb{Q})$ y deduzca $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$.
- ii) Calcule $m(\xi_6, \mathbb{Q})$.
- iii) Pruebe que $m(\xi_n, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ si y sólo si n es primo.
- iv) Pruebe que $\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ admite una subextensión cuadrática y caracterícela.
Sugerencia: considere el elemento $\xi_5 + \xi_5^{-1}$.
- v) Calcule $m(\xi_7 + \xi_7^{-1}, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 14. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \notin \mathbb{Q}^p$.

- i) Pruebe que $m(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.
Sugerencia: recuerde el Ejercicio 23 de la Práctica 1.
- ii) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $m(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterice K y calcule $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

Ejercicio 15. Se define $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} : x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Pruebe que $\overline{\mathbb{Q}}$ es una extensión algebraica que no es finita. Pruebe que $\overline{\mathbb{Q}}$ es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 16. Sea $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una numeración de los primos positivos.

- i) a) Pruebe que $\forall a \in \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}]$ con $a \notin \mathbb{Q}$ y $a^2 \in \mathbb{Q}$, existen $b \in \mathbb{Q}$ y enteros $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tales que $a = b\sqrt{p_{i_1}} \dots \sqrt{p_{i_k}}$.
Sugerencia: Pruebe por inducción un enunciado ligeramente más fuerte.
 - b) Calcule $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}]$.
 - c) Calcule la cantidad de subextensiones de grado 2 de $\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}] / \mathbb{Q}$.
- ii) Calcule $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{Q}]$.
- iii) ¿Existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que $\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$?
- iv) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Deduzca $[K : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 17. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Pruebe que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?

Ejercicio 18.

- i) Pruebe que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.
- ii) Sea E/K algebraica. Calcule el cardinal de E en función del cardinal de K .
- iii) Deduzca que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a .

Ejercicio 19.

- i) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Pruebe que hay solo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{C}$ y que en cada caso $f(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ (de hecho, vale la igualdad).
- ii) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.
 - a) Pruebe que hay solo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}] \rightarrow \mathbb{C}$ pero, en general, $f(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]) \not\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]$.
 - b) Considere $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}, \xi_3]$. ¿Qué sucede en este caso?

Ejercicio 20. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $x^8 - 2$. Caracterice K y calcule $[K : \mathbb{Q}]$. Repita este procedimiento con $x^4 + 2x^2 + 2$, $x^4 + 3x^2 + 1$, $x^6 + 3$ y $x^8 - 3$.

Ejercicio 21. Sea α la raíz real de $f(X) = X^3 + 2X^2 - 2X + 2$. Escriba a $(\alpha + 3)^{-1}$ como combinación \mathbb{Q} -lineal de $1, \alpha$ y α^2 .

Ejercicio 22. Sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ las raíces de $X^5 - X - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Halle un polinomio cuyas raíces sean

- a) $\{\alpha_1 - 2, \dots, \alpha_5 - 2\}$.
- b) $\{\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_5^{-1}\}$.
- c) $\{\alpha_1^5, \dots, \alpha_5^5\}$.

Ejercicio 23. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- i) Si x e y son trascendentes sobre K , entonces $x + y$ o $x \cdot y$ es trascendente sobre K .
- ii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K , entonces $x + y$ es trascendente sobre K .
- iii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K , entonces $x \cdot y$ es trascendente sobre K .
- iv) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$, entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K .
- v) Si x e y son trascendentes sobre K , entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K .

Ejercicio 24. Decimos que un número $x \in \mathbb{R}$ es *construible* si existe una cadena de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq \mathbb{R}$ tales que $[F_k : F_{k-1}] \leq 2$ para todo $k = 1, \dots, n$ y $x \in F_n$, y que un número complejo z es *construible* si sus partes real e imaginaria lo son.

- a) Pruebe que $\sqrt[3]{2}$ no es construible.
- b) Pruebe que $z \in \mathbb{C}$ es construible si y solo si existe una cadena de cuerpos

$$\mathbb{Q}[i] = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq \mathbb{C}$$

tales que $[F_k : F_{k-1}] \leq 2$ para todo $k = 1, \dots, n$ y $z \in F_n$.

- c) Pruebe que si $\xi_n \in \mathbb{C}$ es construible, entonces $\varphi(n)$ es una potencia de 2, donde $\varphi(n)$ denota la *función de Euler*.

Ejercicio 25. Sea $f(X) = m(\xi_n, \mathbb{Q}[\xi_m]) \in \mathbb{Q}[\xi_m][X]$.

- a) Calcule $\text{gr } f$.
- b) Halle $f(X)$ cuando $(m, n) = 1$.

Ejercicio 26.

- a) Sea K un cuerpo y sea $f = g/h \in K(X) - K$, donde $g, h \in K[X]$ sin factores comunes. Pruebe que $[K(X) : K(f)] = \max \{\text{gr}(g), \text{gr}(h)\}$.
- b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcule $m(X, K(X^n))$.
- c) Pruebe que $\exp(2\pi i X)$ no es algebraico sobre $\mathbb{C}(X)$.

Sugerencia: considere $X \mapsto X + 1$.

* **Ejercicio 27.** Sea $A_n = \text{Van}(1, \xi_n, \xi_n^2, \dots, \xi_n^{n-1}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matriz de Vandermonde con las raíces n -ésimas de la unidad.

- (a) Calcule $A^t A$.
- (b) Si n es impar, pruebe que $\sqrt{\pm n} \in \mathbb{Q}[\xi_n]$ para cierta elección del signo.
- (c) Pruebe que cualquier extensión cuadrática de \mathbb{Q} está contenida en una ciclotómica.

* **Ejercicio 28.** Sean $m, n \geq 1$ enteros y $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ matrices. Las transformaciones lineales

$$L_A, R_B : \mathbb{C}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$$

se definen por $L_A(X) = AX$ y $R_B(X) = XB$.

- a) Pruebe que L_A y R_B conmutan.
- b) Halle el polinomio característico de L_A en función del de A .
- c) Si A y B son diagonalizables, halle los autovectores de $L_A + R_B$ en función de los de A y B .
- d) Pruebe que el conjunto de *enteros algebraicos*

$$\overline{\mathbb{Z}} := \{\alpha \in \mathbb{C} : \exists f \in \mathbb{Z}[X] \text{ mónico que verifica } f(\alpha) = 0\}$$

es un anillo.

* **Ejercicio 29.** Sean $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subseteq \mathbb{C}$ las raíces de $f(X) = X^4 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Halle $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 6 tal que sus raíces sean los productos $\alpha_i \alpha_j$ con $1 \leq i < j \leq 4$.