

# Topología Algebraica

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 4

## Teoría combinatoria de grupos y espacios finitos

---

1. Probar que  $\langle x, y | xyx^{-1}, x^{-1}y^3 \rangle$  cumple la conjetura de Andrews-Curtis, es decir, es  $Q^{**}$ -equivalente a  $\langle \rangle$ . Probar además que  $\langle x, y | x^3y^{-4}, xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1} \rangle$  es una presentación del grupo trivial. No se sabe si esta presentación cumple Andrews-Curtis, es uno de los llamados "potenciales contraejemplos".
2. Sea  $\Gamma$  un LOT que contiene una hoja  $v$  que no es label. Probar que  $\Gamma$  (léase  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}_\Gamma}$ ) es homotópicamente equivalente al LOT que se obtiene eliminando  $v$  y la única arista incidente.
3. Sea  $\Gamma$  un LOT que tiene una arista cuyo label coincide con uno de los vértices adyacentes. Probar que  $\Gamma$  es homotópicamente equivalente a un LOT que tiene una arista menos que  $\Gamma$ .
4. Sea  $\mathcal{P}$  una presentación que contiene una relación  $r$  que está en el subgrupo normal generado por las relaciones distintas de  $r$ . Probar que  $\mathcal{P}$  no es esférica.
5. Probar que la conjetura de Whitehead se verifica si el subcomplejo es simplemente conexo.
6. Sea  $K$  un CW-complejo conexo de dimensión 2 y sea  $L$  un subcomplejo conexo. ¿Es cierto que la inclusión  $L \hookrightarrow K$  induce un monomorfismo en los  $\pi_2$ ?
7. Probar que para cualquier grupo  $H$  y coeficientes  $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$ , la ecuación  $h_1xh_2yh_3x^{-1}h_4y^{-1}$  en las variables  $x, y$  tiene solución en un overgroup de  $H$ .
8. Probar que  $\mathcal{P} = \langle x | x^2x^{-1} \rangle$  no es DR pero es esférica.
9. Sea  $H = \mathbb{Z}_p$  con  $p$  primo impar y  $h \in H$  un generador. Probar que la ecuación  $xhx^{-1}hxx^{-1}x^{-1}h^{-2}$  no tiene solución en ningún overgroup de  $H$ .
10. Probar que dos CW-complejos  $K(G, 1)$  son siempre homotópicamente equivalentes.
11. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos de orden entre posets no necesariamente finitos tales que  $f \leq g$ . Probar que  $|\mathcal{K}(f)|, |\mathcal{K}(g)| : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$  son homotópicas.
12. Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Sea  $L$  el complejo simplicial que tiene como vértices a los símlices maximales de  $K$  y como símlices a los conjuntos de símlices maximales de  $K$  con intersección no vacía. Probar que  $K$  y  $L$  son homotópicamente equivalentes.
13. Probar que todo espacio finito  $T_0$  contráctil  $X$  contiene un punto que es retracto por deformación fuerte de  $X$  y mostrar con un ejemplo que puede haber un punto que no sea retracto por deformación fuerte de  $X$ .
14. Probar que si un espacio finito  $T_0$   $X$  es contráctil, entonces  $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$  también lo es.
15. Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  conexo y sea  $x \in X$  un punto que no es maximal ni minimal. Probar que la inclusión  $X \setminus \{x\} \rightarrow X$  induce un epimorfismo en los grupos fundamentales (se puede usar que existe una equivalencia débil  $|\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$  que es natural (conmuta con un morfismo de posets y su morfismo simplicial asociado)).

16. Probar que existe un espacio finito  $T_0$  no contráctil cuyos grupos de homotopía son todos triviales (se puede entregar sólo si no aparece un ejemplo en un final anterior).
17. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre espacios finitos  $T_0$  tal que  $f^{-1}(U_y)$  es acíclico para todo  $y \in Y$ . Probar que  $f$  induce isomorfismos en todos los grupos de homología.
18. Sea  $G$  un grupo finito y  $p$  un primo que divide su orden. Sea  $\mathcal{A}_p(G)$  el poset de  $p$ -subgrupos abelianos elementales no triviales (i.e. isomorfos a  $\mathbb{Z}_p^n$  para algún  $n \geq 1$ ). Probar que la inclusión  $\mathcal{A}_p(G) \rightarrow S_p(G)$  es una equivalencia débil entre los espacios finitos (usar el Teorema de McCord, si este fue enunciado en algún final anterior).
19. Probar que si  $\mathcal{A}_p(G)$  es contráctil, entonces  $S_p(G)$  también.
20. Probar que si un CW-complejo finito  $X$  colapsa elementalmente a un subcomplejo  $Y$  (con dos celdas menos), entonces  $Y$  es retracto por deformación fuerte de  $X$ .