

Topología Algebraica

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 3

CW-complejos, homología celular y grupos de homotopía

1. Probar que los revestimientos de CW-complejos son CW-complejos.
2. Sea X un CW-complejo y $A \subseteq X$ un subcomplejo. Probar que X/A es un CW-complejo.
3. Sean X, Y CW-complejos y $f : X \rightarrow Y$ celular. Probar que el cilindro Z_f es un CW-complejo.
4. Si X, Y son CW-complejos y X es compacto, entonces $X \times Y$ es un CW-complejo.
5. Sea $\mathbb{R}P^n = S^n / \sim$ donde $\sim$ identifica puntos antipodales. Probar que $\mathbb{R}P^n$ es un CW-complejo.
6. Probar que dos estructuras de CW-complejo de un mismo espacio tienen igual dimensión.
7. Sea $X = S^2 / \sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia que identifica puntos del ecuador $S^1 \subseteq S^2$ antipodales. Calcular los grupos de homología de X .
8. Calcular los grupos de homología de la botella de Klein.
9. Sea X un CW-complejo de dimensión n . Probar que $H_n(X)$ es abeliano libre.
10. Probar que para todo grupo abeliano G y $n \geq 1$, existe un espacio de Moore $M(G, n)$.
11. Probar que para todo CW-complejo X , $H_k(X \times S^n) = H_k(X) \oplus H_{k-n}(X)$ donde $H_i(X) = 0$ si $i < 0$.
12. Probar que los revestimientos inducen isomorfismos en todos los grupos de homotopía de orden mayor a uno.
13. Probar que los grupos de homotopía relativos $\pi_n(X, A, x_0)$ son abelianos si $n \geq 3$.
14. El espacio proyectivo de dimensión infinita $\mathbb{R}P^\infty$ se obtiene de S^∞ identificando puntos antipodales. Probar que $\mathbb{R}P^\infty$ es un $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.
15. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.
16. Sean x_0, x_1 puntos en la misma componente arcoconexa de un subespacio A de un espacio X . Probar que $\pi_n(X, A, x_0) \simeq \pi_n(X, A, x_1)$.
17. Calcular $\pi_n(S^n \vee S^1)$.
18. Sea (X, A) un CW-par y sea Y un espacio topológico arcoconexo tal que $\pi_{k-1}(Y) = 0$ para todo k tal que X tiene una k -celda que no está en A . Probar que toda $f : A \rightarrow Y$ continua se puede extender a X . Deducir que todo subcomplejo contráctil de un CW-complejo X es un retracts de X .
19. Probar que la suspensión de un CW-complejo acíclico es contráctil.
20. Probar que $\mathbb{R}P^2$ y $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ tienen los mismos grupos de homotopía pero no son homotópicamente equivalentes.

21. Sea X un CW-complejo $K(\mathbb{Z}, 1)$ (i.e. $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ y $\pi_n(X) = 0$ para todo $n \neq 1$). Probar que X es homotópicamente equivalente a S^1 .
22. (Difícil) Probar que todo CW-complejo es homotópicamente equivalente a un poliedro.
23. Probar que existe un CW-complejo que no es un poliedro.
24. Sea X un CW-complejo y $A, B \subseteq X$ dos subcomplejos contráctiles tales que $A \cap B$ es contráctil y $A \cup B = X$. Probar que X es contráctil.
25. Sea (X, A) un CW-par tal que todas las celdas de X que no están en A tienen dimensión mayor a cierto n . Probar que (X, A) es n -conexo y en particular $X^n \hookrightarrow X$ induce isomorfismos en los π_k para todo $k < n$. De esto se deduce que agregar celdas de dimensión mayor o igual a $m + 2$ no cambia el π_m .
26. Sea (X, A) un CW-par y sea Y un espacio contráctil. Probar que toda función continua $A \rightarrow Y$ se extiende a X .
27. Sean X, Y CW-complejos de dimensión n y sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua tal que $f_* : \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ es un isomorfismo para todo $k \leq n$. Probar que f es una equivalencia homotópica.