

Topología Algebraica

Primer cuatrimestre - 2025
Práctica 2
Espacios de adjunción y (co)fibraciones

1. Sean X, Z espacios, $A \subseteq X, Y \subseteq Z$ subespacios cerrados. Sea $f : X \rightarrow Z$ continua tal que $f(A) \subseteq Y, f(X \setminus A) \subseteq Z \setminus Y$ y $f : X \setminus A \rightarrow Z \setminus Y$ es una biyección. Si X es compacto y Z es Hausdorff entonces

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

es un pushout.

2. Sean X, Y espacios T_2 y A un subespacio cerrado de X tales que para todo $x \in X \setminus A$ existe un entorno cerrado de x en X que no interseca a A . Además supongamos que A es retracto de un entorno de A en X . Probar que para toda $f : A \rightarrow Y$ continua, $Y \bigcup_f X$ es T_2 .
3. Probar que una función continua $i : A \rightarrow X$ es una cofibración si y sólo si para todo espacio Y y funciones continuas $g : A \rightarrow Y^I, f : X \rightarrow Y$ tales que $ev_0 g = fi$ existe $\tilde{g} : X \rightarrow Y^I$ tal que $ev_0 \tilde{g} = f$ y $\tilde{g}i = g$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y^I \\ \downarrow i & \nearrow \exists \tilde{g} & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

4. Probar que los homeomorfismos son cofibraciones, que composición de cofibraciones es cofibración y que las cofibraciones son estables por cambio de cobase.
5. Sea $i : A \rightarrow X$ una función subespacio y sea $s : Z_i \rightarrow X \times I$ la función inducida. Probar que s es inyectiva y que en general no es subespacio. Probar que si i es subespacio cerrada, entonces s sí resulta subespacio.
6. Probar que si X es un espacio y A es un subespacio finito, entonces los abiertos de $A \times I \cup X \times \{0\} \subseteq X \times I$ son aquellos que intersecados con $A \times I$ y con $X \times \{0\}$ son ambos abiertos, en $A \times I$ y $X \times \{0\}$, respectivamente. Este es un lema en un paper de Cianci y Ottina en el que se caracterizan las cofibraciones entre espacios finitos.
7. Sea X un espacio normal (en particular T_1) y sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Probar que $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración si y sólo si existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$ y $j : A \hookrightarrow U$ es cofibración.
8. Sea $i : A \hookrightarrow X$ una cofibración. Probar que $i \times 1_I : A \times I \rightarrow X \times I$ es una cofibración (aunque i no sea cerrada).

9. Probar que si $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración y A es contráctil entonces el cociente $q : X \rightarrow X/A$ es una equivalencia homotópica.
10. Probar que si $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración y una equivalencia homotópica entonces A es un retracto por deformación fuerte de X .
11. Para las dos inclusiones de $*$ en el espacio de Sierpinski decidir cuál es una cofibración.
12. Sea $i : A \rightarrow X$ una cofibración, Y un espacio y $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones homotópicas que coinciden en A . Es cierto que $f \simeq g$ rel A ?
13. Probar que los homeomorfismos son fibraciones, que composición de fibraciones es una fibración, que son estables por cambio de base y que producto arbitrario de fibraciones $p_j, j \in J$ es fibración.
14. Probar que para todo espacio X , $ev_0 : X^I \rightarrow X$ es una fibración.
15. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración. Sea X un espacio contráctil y $f : X \rightarrow B$ una función con imagen contenida en la imagen de p . Probar que f se puede levantar a E .
16. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que si la función $\bar{p} : X^I \rightarrow P_f$ inducida por f y ev_0 es una retracción, entonces f es una fibración.
17. Probar que toda función continua se factoriza como ps donde s es una equivalencia homotópica y p es una fibración.
18. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración con B arcoconexo. Probar que las fibras de dos puntos arbitrarios de B son homotópicamente equivalentes.
19. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración
 - a) Si B es contráctil y $b \in B$, probar que existe una equivalencia homotópica $f : E \rightarrow B \times E_b$ tal que $p_B f = p$, donde E_b denota a la fibra y p_B es la proyección sobre B . En este caso p se dice homotópicamente trivial.
 - b) En las condiciones del ítem anterior, supongamos que $i : A \rightarrow B$ es una cofibración. Probar que la fibración inducida $q : p^{-1}(A) \rightarrow A$ también es homotópicamente trivial.
20. La *complejidad topológica* $TC(X)$ de un espacio X es el mínimo n tal que existen abiertos $U_0, U_1, \dots, U_n$ de $X \times X$ que lo cubren, junto con funciones continuas $s_i : U_i \rightarrow X^I$ tales que $ps_i = 1_{U_i}$, donde $p : X^I \rightarrow X \times X$ es la fibración que manda un camino al par origen-fin. Si no existe un cubrimiento finito así, la complejidad es infinito.
Probar que TC es un invariante homotópico y que vale 0 si y sólo si el espacio es contráctil.
21. Calcular $TC(S^1)$ y más generalmente $TC(S^n)$ para todo n impar. El cálculo para n par es un poco más difícil. Usualmente la cota inferior se demuestra usando cohomología.