

Topología Algebraica
Primer cuatrimestre - 2025
Práctica 1
Complejos simpliciales/poliedros

1. Sea K el complejo simplicial con conjunto de vértices $V_K = \mathbb{N}_0$ y conjunto de símlices $S_K = \{n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \{0, n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Probar que $|K|$ no es un espacio métrico.
2. Dar ejemplos de espacios métricos que no sean poliedros.
3. Probar que el plano proyectivo, la botella de Klein y el toro son poliedros. Comentario: En general toda variedad topológica de dimensión 2 ó 3 es un poliedro (es falso en dimensión mayor o igual a 4. Para dimensión mayor o igual a 5 esto se probó en 2015). Toda variedad diferenciable es un poliedro.
4. Sea $\mathcal{U} = \{\overset{\circ}{\text{st}}(v) \mid v \in K\}$. Probar que el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es isomorfo a K .
5. Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Probar que una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua si y sólo si la restricción $f| : |K^n| \rightarrow X$ a cada esqueleto es continua.
6. Sea K un complejo simplicial. Probar que $|K|$ es conexo si y sólo si para cada par de vértices $v, w \in K$ existe una sucesión $v = v_0, v_1, \dots, v_r = w$ de vértices tal que $v_i v_{i+1} \in K$ para todo i .
7. Probar que todo poliedro es normal.
8. Probar que todo poliedro conexo tiene un revestimiento universal.
9. Probar que los revestimientos de poliedros son poliedros.
10. Sean K y L complejos simpliciales y sea $\varphi : K \rightarrow L$ un aproximación simplicial de una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$. Probar que $f(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\text{st}}(\varphi(v))$ para todo $v \in K$.
11. Sean K y L complejos simpliciales finitos y $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Probar que para todo $\epsilon > 0$ existen subdivisiones $\tilde{K}$ de K y $\tilde{L}$ de L y un morfismo simplicial $\varphi : \tilde{K} \rightarrow \tilde{L}$ tal que $d(f(x), |\varphi|(x)) < \epsilon$ para todo $x \in |K|$, donde d denota a la métrica usual de $|L|$.
12. Hallar dos morfismos simpliciales con realizaciones homotópicas que no sean contiguos. ¿Existen morfismos simpliciales en diferentes clases de contigüidad que tengan realizaciones homotópicas?
13. Probar que dos aproximaciones simpliciales $K \rightarrow L$ de una misma función continua $|K| \rightarrow |L|$ son contiguas.
14. Sea X un conjunto. Decimos que un cubrimiento $\mathcal{V}$ de X *refina* a otro cubrimiento $\mathcal{U}$ si todo elemento de $\mathcal{V}$ está contenido en uno de $\mathcal{U}$. Una *proyección canónica* $\mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})$ es una aplicación que elige para cada $V \in \mathcal{V}$ un elemento $\varphi(V) = U \in \mathcal{U}$ que contiene a V . Probar que toda proyección canónica es un morfismo simplicial y que dos proyecciones canónicas son contiguas.
15. Sea K un complejo simplicial finito. Probar que $H_0(K)$ es un grupo abeliano libre cuyo rango es el número de componentes conexas de $|K|$.
16. Calcular a mano los grupos de homología del borde del 3-simplex.

17. Sea K un complejo simplicial y sean $bcd, acd, abd, abc \in K$ cuatro símplices de dimensión 2 tales que bcd es maximal. Probar que $|K|$ no tiene el tipo homot pico de S^3 .
18. Probar que S^2 tiene triangulaciones con n vértices para cada $n \geq 4$, pero no tiene ninguna triangulación con 99 símplices.
19. Sea K un complejo tal que todo subcomplejo de 4 vértices o menos est  contenido en un cono. Probar que $H_1(K) = 0$. Lo anterior se puede probar directamente con homología simplicial. Alternativamente, probar este resultado más fuerte: K es simplemente conexo.
20. Si K_0 es un sucomplejo de un complejo K y L_0 es subcomplejo de L , un *morfismo (simplicial) de pares* $\varphi : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ es un morfismo simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ que manda símplices de K_0 en símplices de L_0 . Dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ se dicen *contiguos* si $\varphi, \psi : K \rightarrow L$ son contiguos y $\varphi|_{K_0}, \psi|_{K_0} : K_0 \rightarrow L_0$ son contiguos.
- Probar que si dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ cumplen que $\varphi, \psi : K \rightarrow L$ son contiguos y L_0 es subcomplejo pleno de L , entonces los morfismos de pares son contiguos.
 - Probar que si dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ son contiguos entonces inducen morfismos de complejos $C_*(K, K_0) \rightarrow C_*(L, L_0)$ homotópicos.
21. Sea K un complejo simplicial finito y no vacío. Probar que $\tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$ es isomorfo a $H_0(K)$.
22. Probar que si un complejo simplicial K es unión de dos subcomplejos L y M , se tiene una sucesión exacta corta de complejos de cadenas
- $$0 \rightarrow C_*(L \cap M) \rightarrow C_*(L) \oplus C_*(M) \rightarrow C_*(K) \rightarrow 0$$
- y por lo tanto se tiene una sucesión de Mayer-Vietoris para la homología simplicial. También se tiene una sucesión análoga para homología reducida.
23. Sea σ un 1-simplex, $\partial\sigma$ su borde, K un complejo simplicial y ∂K el join de ambos (la *suspensión* de K). Probar, usando la sucesión de Mayer-Vietoris, que $\tilde{H}_n(\partial K) = \tilde{H}_{n-1}(K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
24. Sea K un complejo simplicial finito. Un simplex $\sigma \in K$ se dice una *cara libre* de K si es cara propia de un único simplex τ . Notar que si removemos de K los símplices σ y τ obtenemos un subcomplejo $L \leq K$. Decimos que K *colapsa elementalmente* a L . Un *colapso* es una sucesión de colapsos elementales y K se dice *colapsable* si colapsa a un punto. Probar que todo complejo colapsable es acíclico. En realidad vale que es contráctil, pero evitar por ahora usar ese argumento.
25. Sea K un complejo simplicial y sea K' su subdivisión baricéntrica. Sea $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K')$ el operador subdivisión. Probar que si $\varphi : K' \rightarrow K$ es una aproximación de la identidad entonces $\varphi_*\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K)$ es la identidad.
26. Sea X un poliedro compacto. Probar que toda función continua $f : X \rightarrow X$ null homot pica tiene un punto fijo.
27. Probar que el Teorema de Lefschetz sigue siendo válido para retracts de poliedros compactos.
28. Probar que el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ tiene la propiedad del punto fijo.

29. Si K es un complejo finito y $H_1(K)$ tiene a $\mathbb{Z}$ como sumando directo, entonces S^1 es un retracto de $|K|$ (difícil). Probar que en este caso $|K|$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Un cubrimiento $\mathcal{U}$ de un espacio X se dice *localmente finito* si todo punto de X tiene un entorno que interseca sólo finitos elementos de $\mathcal{U}$. Un espacio se dice *paracompacto* si todo cubrimiento por abiertos admite un refinamiento por abiertos localmente finito. Recordar que si X es paracompacto y Hausdorff, todo cubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ admite una partición de la unidad subordinada (ver J. Munkres. Topology, Thm 41.7).

30. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio X y sea $N(\mathcal{U})$ su nervio. Una función continua $f : X \rightarrow |N(\mathcal{U})|$ se dice *canónica* si $f^{-1}(\overset{\circ}{\text{st}}(U)) \subseteq U$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Probar que
- (i) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de X , hay una biyección entre las funciones canónicas $X \rightarrow |N(\mathcal{U})|$ y las particiones de la unidad subordinadas a $\mathcal{U}$.
 - (ii) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de X , todas las funciones canónicas $X \rightarrow |N(\mathcal{U})|$ son homotópicas.
31. Decimos que un espacio X tiene dimensión topológica menor o igual a n si todo cubrimiento por abiertos de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio tiene dimensión menor o igual a n . Decimos que la dimensión topológica de X es $\dim(X) = n$ si es menor o igual a n pero no es menor o igual a $n - 1$. Probar que:
- (i) Si $A \subseteq X$ es un subespacio cerrado, entonces $\dim(A) \leq \dim(X)$.
 - (ii) Si K es un complejo simplicial finito y $\dim(K) \leq n$, entonces $\dim(|K|) \leq n$.
 - (iii) Si σ es un n -simplex, entonces $\dim(|\sigma|) = n$.
 - (iv) Si X es paracompacto y $\dim(X) \leq n$, entonces toda función continua $X \rightarrow S^m$ es nullhomotópica para $m > n$.
32. Sea X un espacio métrico compacto y sea C el espacio de funciones continuas $X \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ con la métrica infinito. Probar que
- (i) C es un espacio métrico completo.
 - (ii) Para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$C_m = \{f \in C \mid \text{diam}(f^{-1}(z)) < \frac{1}{m} \forall z \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$

es abierto en C .

(iii) $\bigcap C_m$ es el conjunto de funciones subespacio $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

(iv) Si $\dim(X) \leq n$, C_m es denso en C para todo m . Deducir que X es subespacio de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

33. Se construye al azar un complejo simplicial K con $V_K \subseteq \{a, b, c\}$. Para cada vértice se lanza una moneda y si sale cara, se agrega al complejo. Una vez construido el 0-esqueleto, por cada par de vértices que esté presente, se lanza la moneda y si sale cara se agrega el 1-simplex con ese borde. Finalmente, si todo el triángulo está completo, se lanza una moneda para saber si incluir el 2-simplex. Cuál es la probabilidad de que K sea contráctil? Se estudian propiedades asintóticas de los complejos cuando el número de (potenciales) vértices tiende a infinito.