Topología

Segundo cuatrimestre 2025

Soluciones del segundo examen parcial

Ejercicio 1. Sea $p : E \to B$ un revestimiento tal que $p^{-1}(b)$ es un conjunto finito para todo $b \in B$. Probar que E es compacto y Hausdorff si y solo si B lo es.

Demostración. [Resolución] Comencemos por la ida. Como E es compacto y p es continua, B es compacto. Tomemos $x, y \in B$, y abiertos parejamente cubiertos $x \in U_x$, $y \in U_y$. Sean $z_1, \dots, z_n$ los elementos de $p^{-1}(x)$ y $w_1, \dots, w_k$ los elementos de $p^{-1}(y)$. Llamamos V_x^i al abierto panquequito que tiene a z_i y V_y^j al abierto panquequito que contiene a w_j. Como E es Hausdorff y son finitos puntos, existen abiertos V_{z_i}, V_{w_j} tales que

$$z_i \in V_{z_i} \subseteq V_x^i,\ w_j \in V_{w_j} \subseteq V_w^j$$

y son todos disjuntos dos a dos. Veamos que $\bigcap_{i=1}^n p(V_{z_i})$ y $\bigcap_{j=1}^k p(V_{w_j})$ son dos abiertos disjuntos que contienen a x e y. Si b está en la intersección y e está en su fibra, entonces e está en algún V_i^x (y por lo tanto en V_{z_i}) y en algún V_j^y (y por lo tanto en V_{w_j}), pero esto es absurdo por ser V_{z_i} y V_{w_j} disjuntos.

Ahora probemos la vuelta, empezando por ver que E es Hausdorff. Sean $x, y \in E$. Si $p(x) = p(y)$, entonces los abiertos de la preimagen de un entorno parejamente cubierto de $p(x)$ separan a x e y. Supongamos que $p(x) \neq p(y)$. Como B es Hausdorff, tomamos abiertos disjuntos $p(x) \in U_x$, $p(y) \in U_y$. Entonces $p^{-1}(U_x)$ y $p^{-1}(U_y)$ son abiertos disjuntos que separan a x e y.

Por último veamos que E es compacto. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento por abiertos de E. Sea $x \in B$ y sea $x \in U_x$ un abierto parejamente cubierto. Tenemos que $p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$, y $p^{-1}(U_x) = \sqcup_{i=1}^k V_i$ con $y_i \in V_i$. Tomamos abiertos $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ con $y_i \in U_{\alpha_i}$. Definimos los abiertos $V_x = \cap_{i=1}^k p(V_i \cap U_{\alpha_i})$, que son parejamente cubiertos, pues los U_x lo son. Miramos el cubrimiento por abiertos parejamente cubiertos $\{V_x\}_{x \in B}$. Como B es compacto podemos tomar un subcubrimiento finito $\mathcal{V}$. Para cada abierto de $\mathcal{V}$, los finitos abiertos de su preimagen están contenidos en abiertos de $\mathcal{U}$. Así obtenemos un subcubrimiento finito $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$.

Ejercicio 2. Dado un espacio topológico X, definimos la *suspensión* de X como

$$SX := \frac{X \times [0,1]}{(x,0) \sim (y,0),\ (x,1) \sim (y,1)\ \ \forall x, y \in X}.$$

(a) Pruebe que si SX es simplemente conexo, entonces X es conexo.

(b) Pruebe que si X es arcoconexo, entonces SX es simplemente conexo.

Demostración. [Resolución] **(a) Opción 1:** si X no es conexo, tomamos una desconexión $X = U \sqcup V$. Sean $x \in U$ e $y \in V$. Definimos una función $f : I \sqcup I \to SX$ que manda el primer intervalo a $\{x\} \times I$ y el segundo intervalo a $\{y\} \times I$. Es claro que f pasa al cociente $\frac{I \sqcup I}{0 \sim 0, 1 \sim 1} \simeq S^1$ donde identificamos las puntas. Entonces tenemos un lazo $\sigma : S^1 \to SX$, y debemos ver que no es null-homotópico.

Sea $r : SX \to \sigma(S^1)$ definida por

$$r(z,t) = \begin{cases} (x,t) & \text{si } z \in U \\ (y,t) & \text{si } z \in V \end{cases}.$$

Como U y V son abiertos, notamos que $r^{-1}(W)$ es abierto para todo $W \subseteq S^1$ abierto. Entonces r es continua. Además, $\sigma \circ r = \mathrm{id}_{S^1}$. Por lo tanto, $\sigma_* \circ r_* = id_{\pi_1 S^1}$. Consecuentemente σ no es null-homotópica y SX no es simplemente conexo, absurdo.
(a) Opción 2: Si hicieron el ejercicio 5 de la guía 9, pueden afirmar que $\tilde{H}_1(SX) = \tilde{H}_0(X)$. Como SX es arcoconexo, $H_1(SX)$ es isomorfo al abelianizado del $\pi_1(SX)$. Luego, como SX es simplemente conexo, $\tilde{H}_0(X) = \tilde{H}_1(SX) = 0$ y X es arcoconexo.
(b): sea $p : X \times [0,1] \to SX$ el cociente. Sean $U = p(X \times (\frac{1}{3}, 1])$ y $V = p(X \times [0, \frac{2}{3}))$. Ambos son abiertos arcoconexos, cubren a SX y su intersección es homotópicamente equivalente a X, por lo que es arcoconexa. Entonces por el teorema de van Kampen tenemos que

$$\pi_1(SX) \simeq \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V).$$

Tanto U como V son homeomorfos al cono sobre X, por lo que son contráctiles. Entonces $\pi_1(SX)$ es trivial. Además notamos que SX es arcoconexo ya que todo punto se conecta al punto correspondiente al 0 o al 1. Por lo tanto SX es simplemente conexo.

Ejercicio 3. Sea $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$. Pruebe que si $f : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces $f((0,0,0)) = (0,0,0)$.

Demostración. [Resolución]
Observamos que X es la unión de los tres planos coordenados. Como f es un homeomorfismo, también tenemos un homeomorfismo entre $X \setminus \{(0,0,0)\}$ y $X \setminus \{f((0,0,0))\}$. Calculemos entonces el grupo fundamental de X menos un punto. Notamos que hay tres posibles casos: cuando el punto es $(0,0,0)$, cuando el punto está en dos de los tres planos, y cuando el punto está en sólo uno de los planos.
Veamos qué pasa cuando quitamos $(0,0,0)$, los otros dos casos son similares. Miremos la homotopía $H : X \setminus \{(0,0,0)\} \times I \to X \setminus \{(0,0,0)\}$ definida por

$$H(x,t) = x(1-t) + \frac{x}{||x||}t.$$

Esta homotopía nos dice que $X \cap S^3$ es un retracto por deformación (fuerte) de $X \setminus \{(0,0,0)\}$. $X \cap S^3$ es un grafo, y tomando un árbol generador notamos que quedan 7 aristas excluidas. Por lo tanto $\pi_1(X \setminus \{(0,0,0)\}) \simeq F_7$.
En los otros dos casos los grupos fundamentales son isomorfos a F_3 y $\mathbb{Z}$ respectivamente. Luego

$$f((0,0,0)) = (0,0,0).$$

Ejercicio 4. Dado X un espacio topológico, se define sX como el conjunto $X \amalg \{*_1, *_2\}$ dotado de una topología que extiende a la de X de forma que los únicos entornos de $*_i$ son $X \cup \{*_i\}$ y sX. Pruebe que $\tilde{H}_{n+1}(sX) = \tilde{H}_n(X)$.

Demostración. [Resolución] Tomamos el cubrimiento por abiertos $U = X \cup *_1$, $V = X \cup *_2$. Miramos la homotopía $H : U \times I \to U$ definida por

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ *_1 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Notamos que H es continua porque preimagen de abierto es abierto, y por lo tanto $*_1$ es retracto por deformación (fuerte) de U. Luego U es contráctil. Similarmente V es contráctil. Además tenemos que $U \cap V = X$. Aplicando Mayer-Vietoris obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \to 0 \to \tilde{H}_{n+1}(sX) \to \tilde{H}_n(X) \to 0 \to \tilde{H}_n(sX) \to \tilde{H}_{n-1}(X) \to 0 \to \cdots .$$

Por lo tanto $\tilde{H}_{n+1}(sX) = \tilde{H}_n(X)$ para todo n.