

Topología
Segundo cuatrimestre 2025
Soluciones de primer examen parcial

Ejercicio 1. Sean $X = \mathbb{R}^2 \cup \{0'\}$ y $\mathbb{H}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $\mathbb{H}_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Notamos $B_r^+(p) = B_r(p) \cap \mathbb{H}_+$ y $B_r^-(p) = B_r(p) \cap \mathbb{H}_-$ para cada $r > 0$ y $p \in \mathbb{R}^2$.

(I) Pruebe que la colección

$$\mathcal{B} = \{U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : U \text{ abierto usual}\} \cup \{B_r^+(0) \cup \{0\} : r > 0\} \cup \{B_r^-(0) \cup \{0'\} : r > 0\}$$

define una base de abiertos para una topología en X .

(II) Decida si X equipado con la topología generada por $\mathcal{B}$ resulta un espacio:

- a) arcoconexo;
- b) Hausdorff;
- c) completamente regular.

Resolución. Veamos primero que la colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología. Llamemos B_1, B_2 y B_3 a los uniendos de su definición. Como

$$X = \mathbb{R}^2 \cup \{0'\} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cup (B_1^+(0) \cup \{0\}) \cup (B_1^-(0) \cup \{0'\}),$$

la unión de elementos de $\mathcal{B}$ resulta X .

Como B_1 es una topología en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $B_r^+(0) \cap B_s^+(0) = B_{\min\{r,s\}}^+(0)$ para $? \in \{+, -\}$, sabemos que la intersección de elementos de un mismo conjunto B_i vuelve a pertenecer al conjunto en cuestión. Por otro lado $U \cap V = \emptyset$ para todo $U \in B_2, V \in B_3$. Por lo tanto, basta ver que si $U \in B_1$ y $V \in B_j, j \in \{2, 3\}$ entonces $U \cap V$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$; hacemos el caso $j = 2$.

Consideremos entonces $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ un abierto usual y $V = B_r^+(0) \cup \{0\}$. Como $0 \notin U$, entonces $U \cap V = U \cap B_r^+(0) = U \cap B_r(0) \cap \mathbb{H}_+$. Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, entonces U también lo es, y luego $U \cap B_r(0) \cap \mathbb{H}_+$ es un abierto usual de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pues es un abierto usual de $\mathbb{R}^2$ que está contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Veamos ahora que propiedades satisface X .

- a) Es arcoconexo. Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ como subespacio de X tiene su topología usual, es arcoconexo, y entonces todo par de puntos se arcoconecta para la topología de X . Resta ver que 0 y $0'$ se conectan con algún punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; lo hacemos para $0'$. Consideramos el arco

$$\gamma: I \rightarrow X, \quad \gamma(t) = \begin{cases} 0' & t = 0 \\ (0, -t) & t > 0 \end{cases}$$

Para probar que γ es continua basta ver que $\gamma^{-1}(U)$ es abierto para todo $U \in \mathcal{B}$. Si $U = B_r^+(0) \cup \{0\}$, entonces $\gamma^{-1}(U) = \emptyset$. En cambio $\gamma^{-1}(B_r^-(0) \cup \{0'\}) = [0, r)$. Por último, como $\gamma|_{(0,1]}$ es continua para la topología usual al correstringirla a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es abierto entonces $\gamma^{-1}(U) = \gamma|_{(0,1]}^{-1}(U)$ es abierto.

- b) Es Hausdorff. Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es Hausdorff y es abierto en X , todo par de puntos $p, q \in X \setminus \{0, 0'\}$ pueden separarse por abiertos disjuntos. Por otro lado 0 y $0'$ pueden separarse tomando $B_1^+(0) \cup \{0\}$ y $B_1^-(0) \cup \{0'\}$.

Resta disjuntar a 0 (resp. $0'$) de los puntos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si $p \notin \{0, 0'\}$, entonces como $\mathbb{R}^2$ es Hausdorff existen $0 \in U, p \in V \subset \mathbb{R}^2$ abiertos disjuntos. Más aún, podemos suponer que $U = B_r(0)$ es un abierto básico de $\mathbb{R}^2$. Como en particular $V \not\ni 0$, es abierto en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y por tanto lo es en X . Dado que V no interseca a $B_r(0)$, tampoco interseca a $B_r^+(0) \cup \{0\}$ ni $B_r^-(0) \cup \{0'\}$ en X . Esto prueba que 0 y $0'$ pueden separarse por abiertos disjuntos de p .

- c) No es completamente regular ya que no es regular. Consideremos $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1, y \geq 0\}$. Es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. Luego $\mathbb{R}^2 \setminus F = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \setminus F$ es abierto en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y contiene a $B_1^-(0)$ así que

$$X \setminus F = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \setminus F \cup \{0'\} = ((\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \setminus F) \cup (B_1^-(0) \cup \{0'\}) \in \tau.$$

Es decir, el conjunto F es cerrado en X . Veamos que no es posible separarlo de $0'$ por abiertos. Si fuera el caso, existirían $U \supset F$ y $B_r^-(0) \cup \{0'\}$ abiertos disjuntos. Como $(0, r/2) \in F \subset U$, existe un abierto básico $(0, r/2) \in V \subset U$. Dado que $U \not\ni 0, 0'$ el abierto V debe ser un abierto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, por lo que podemos sin pérdida de generalidad asumir que es de la forma $B_s((0, r/2))$ para algún $s \in (0, r)$. En consecuencia

$$(-s/2, r/2) \in U \cap B_r^-(0) \cup \{0'\},$$

lo cual es una contradicción.

□

Ejercicio 2. Sea X un conjunto no numerable. Consideremos un conjunto $Y = X \sqcup \{*\}$. Defina una topología en Y de forma que:

- (I) la topología subespacio de X sea la discreta;
- (II) todo cubrimiento de Y por abiertos admita un subcubrimiento contable;
- (III) no exista un subespacio $D \subset Y$ denso y contable;
- (IV) exista $C \subsetneq Y$ subespacio cerrado y no compacto.

Resolución. Consideramos $\tau = \mathcal{P}(X) \sqcup \{\{*\} \cup (X \setminus N) : N \subset X \text{ es contable}\}$. Veamos que es una topología.

Como $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ y $N = \emptyset$ es contable, se sigue que $\emptyset, Y \in \tau$. Sean ahora $U, V \in \tau$. Si $U \in \mathcal{P}(X)$, entonces $U \cap V \subset U \subset X$, luego $U \cap V \in \mathcal{P}(X) \subset \tau$; análogamente tenemos que $U \cap V \in \tau$ si $V \subset X$. Si en cambio $U = \{*\} \cup X \setminus N, V = \{*\} \cup X \setminus N'$ con $N, N' \subset X$ numerables, entonces $U \cap V = \{*\} \cup X \setminus (N \cup N') \in \tau$ ya que $\#(N \cup N') \leq 2\aleph_0 = \aleph_0$.

Por último, veamos que τ es cerrada por uniones. Notemos para esto que si $A \subset B \subset Y$ y $*$ $\in A, B$, entonces $A \in \tau$ implica $B \in \tau$. Consideremos $(U_i)_{i \in I} \subset \tau$. Sean $I' = \{i \in I : U_i \subset X\}$ e $I'' = \{i \in I : * \in U_i\}$; para cada $i \in I''$ escribimos $U_i = \{*\} \cup X \setminus N_i$ con N_i numerable. Como $I = I' \sqcup I''$,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I'} U_i \cup \bigcup_{i \in I''} U_i = \{*\} \cup U \cup (X \setminus \bigcap_{i \in I''} N_i).$$

Como $\bigcap_{i \in I''} N_i$ es contable, $\{*\} \cap (X \setminus \bigcap_{i \in I''} N_i) \in \tau$ y entonces $\{*\} \cup U \cup (X \setminus \bigcap_{i \in I''} N_i)$ también es abierto. Veamos ahora que τ cumple lo pedido.

- (I) Por definición los puntos de X son abiertos en Y ; en particular lo son en X .
- (II) Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ cubre a Y por abiertos, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $*$ $\in U_{i_0}$; escribamos $U_{i_0} = \{*\} \cup X \setminus N$ con N numerable. Para cada $x \in N$, existe $i_x \in I$ tal que $U_{i_x} \ni x$. Luego $(U_{i_x})_{x \in N} \cup \{U_{i_0}\}$ es un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$.
- (III) Si D es denso, su intersección con todo abierto de Y es no vacía. Esto aplica en particular a los abiertos $\{x\}$ con $x \in X$; luego $X \subset D$. En particular D no es contable.
- (IV) Cualquier subconjunto numerable $N \subset X$ es cerrado en Y . Como además es discreto e infinito, no es compacto.

□

Ejercicio 3. Sean G un grupo y X un G -espacio. Decimos que la acción de G en X es *propia* si para cada compacto $K \subset X$ existen finitos $g \in G$ tales que $gK \cap K \neq \emptyset$. Pruebe que si la acción es propia y X es un espacio localmente compacto Hausdorff, entonces para todo $x \in X$ el subespacio

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$$

es discreto.

Resolución. Sea $x \in X$. Debemos ver que para cada punto $gx \in G \cdot x$ para $g \in G$ es abierto en $G \cdot x$. Por definición de la topología subespacio, esto significa que exista un abierto U de X tal que $U \cap G \cdot x = \{gx\}$. Si conseguimos un abierto $U \ni x$ tal que $U \cap G \cdot x = \{x\}$, entonces $gU \ni gx$ es abierto y

$$gU \cap G \cdot x = gU \cap g(G \cdot x) = g(U \cap G \cdot x) = g\{x\} = \{gx\}.$$

Por lo tanto, basta probar la afirmación en el caso $g = 1$.

Como X es localmente compacto, existen K compacto y V abierto tales que $x \in V \subset K$. Dado que la acción es propia, el conjunto $F = \{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}$ es finito. Afirmamos ahora que $V \cap G \cdot x \subset \{gx : g \in F\}$. Si $gx \in V$, entonces $gx \in K$ pues $V \subset K$. Por otro lado, como $x \in K$ se sigue que $gx \in gK$, y $gx \in K \cap gK$. Luego $g \in F$, como queríamos ver.

Como $V \cap G \cdot x$ es finito, entonces $Z = (V \cap G \cdot x) \setminus \{x\}$ es finito y en particular cerrado, ya que X es Hausdorff. En consecuencia $U = V \setminus Z$ es un entorno abierto de x , y

$$U \cap G \cdot x = (V \setminus Z) \cap G \cdot x = (V \cap G \cdot x) \setminus Z = \{x\}.$$

□

Ejercicio 4. Sean X e Y dos espacios topológicos localmente compactos y Hausdorff. Pruebe que

$$(X \sqcup Y)^* \equiv X^* \vee Y^*,$$

donde el wedge es con respecto a los puntos $\infty_X \in X^*$ y $\infty_Y \in Y^*$.

Resolución. Como X e Y son LCH, se sigue que $X \sqcup Y$ es LCH y por lo tanto $(X \sqcup Y)^*$ es Hausdorff. Por otro lado, como X^* e Y^* son compactos, y la compacidad se preserva por tanto cocientes como uniones disjuntas finitas, tenemos que $X^* \vee Y^*$ es compacto. Es suficiente entonces construir una biyección continua $X^* \vee Y^* \rightarrow (X \sqcup Y)^*$, ya que toda función continua con dominio compacto y codominio Hausdorff es cerrada.

Notemos que como X es cerrado en $X \sqcup Y$, la inclusión $i_X : X \rightarrow X \sqcup Y$ es propia: si $K \subset X \sqcup Y$ es compacto, entonces $i_X^{-1}(K) = X \cap K$ es cerrado en el compacto K , y por consiguiente es compacto. Se tiene entonces una función continua $i_X^* : X^* \rightarrow (X \sqcup Y)^*$ que se (co)restringe a

i_X y envía ∞_X a $\infty_{X \sqcup Y}$. Similarmente obtenemos $i_Y: Y^* \rightarrow (X \sqcup Y)^*$. Tenemos entonces una función

$$(i_X^*, i_Y^*): X^* \sqcup Y^* \rightarrow (X \sqcup Y)^*,$$

que es continua por el lema de pegado para los abiertos X^* e Y^* de $X^* \sqcup Y^*$. Como $(i_X^*, i_Y^*)(\infty_X) = i_X^*(\infty_X) = \infty_{X \sqcup Y} = i_Y^*(\infty_Y) = (i_X^*, i_Y^*)(\infty_Y)$, esta función pasa al cociente e induce una función continua

$$f := \overline{(i_X^*, i_Y^*)}: X^* \vee Y^* \rightarrow (X \sqcup Y)^*.$$

Una verificación muestra que f es biyectiva. Como es continua por construcción, con esto concluye la demostración. $\square$