Topología

Segundo cuatrimestre - 2025
Práctica 5
Espacios de funciones

---

1. Sean X e Y espacios topológicos. Dotamos a $C(X,Y)$ de la topología compacto-abierta $\tau_{c.a.}$. Para cada $y \in Y$, sea $\phi_y : X \to Y$ la función constante con valor y, y sea $\phi : Y \to C(X,Y)$, definida por $\phi(y) = \phi_y$. Pruebe que ϕ es subespacio. Pruebe, además, que si Y es Hausdorff, entonces ϕ tiene imagen cerrada.

2. *a*) Pruebe que Y es T_0, T_1, T_2 si y sólo si $(C(X,Y), \tau_{c.a.})$ es T_0, T_1, T_2 respectivamente.
   b) Pruebe que Y es regular si y sólo si $(C(X,Y), \tau_{c.a.})$ es regular.[1]
   c) Muestre que si Y es normal, entonces no necesariamente $(C(X,Y), \tau_{c.a.})$ lo es.

3. Sean X e Y espacios topológicos y $A \subseteq X$ un subespacio. Pruebe que la función *restricción* $r_A : (C(X,Y), \tau_{c.a.}) \to (C(A,Y), \tau_{c.a.})$, definida por $r_A(f) = f|_A$, es continua.

4. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Dotamos a $C(X,Y)$, $C(Y,Z)$ y $C(X,Z)$ de la topología compacto-abierta. Pruebe que si Y es localmente compacto y Hausdorff, entonces la función *composición* $\circ : C(Y,Z) \times C(X,Y) \to C(X,Z)$, definida por $\circ(f,g) = f \circ g$ es continua.[2]

5. Pruebe que si $p : E \to B$ es cociente y X es localmente compacto y Hausdorff, entonces $p \times id : E \times X \to B \times X$ es cociente.

6. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio **métrico**. Sobre $C(X,Y)$ se definen las siguientes topologías:

   - τ_f la *topología fina*, cuya base es $\{B(f,\delta) : f \in C(X,Y), \delta : X \to \mathbb{R}_{>0} \text{ continua}\}$, donde $B(f,\delta) = \{g \in C(X,Y) : d(f(x),g(x)) < \delta(x)\ \forall x \in X\}$.
   - la *topología de la convergencia uniforme*, cuya base es $\{B^{\rho}(f,\varepsilon) : f \in C(X,Y), \varepsilon > 0\}$, donde ρ es la distancia definida por $\rho(f,g) = \sup\{\bar{d}(f(x),g(x)) : x \in X\}$
   - τ_c la *topología de la convergencia compacta*, cuya base es $\{B_K(f,\varepsilon) : f \in C(X,Y), \varepsilon > 0, K \subseteq X \text{ compacto}\}$, donde $B_K(f,\varepsilon) = \{g \in C(X,Y) : d(f(x),g(x)) < \varepsilon\ \forall x \in K\}$

   Pruebe que:

   a) top. fina $\supseteq$ top. conv. uniforme $\supseteq$ top. conv. compacta $\supseteq$ top. conv. puntual
   b) Si X es compacto, entonces las topologías de la convergencia uniforme, de la convergencia compacta y fina coinciden.
   c) Si X es discreto, entonces la topología de la convergencia compacta coincide con la topología de la convergencia puntual
   d) Si X es discreto, entonces $Y^X = C(X,Y)$ y la topología caja coincide con la fina.
   e) (f_n) converge a f con la topología de convergencia compacta si y sólo si para todo $K \subseteq X$ compacto, $f_n|_K$ converge a $f|_K$ con la topología de convergencia uniforme.
   f) La topología de convergencia compacta y la compacto-abierta coinciden.

---

[1] *Si $\overline{U} \subseteq V$, entonces $\overline{S(K,U)} \subseteq S(K,V)$.*
[2] *Si $f \circ g \in S(K,U)$, encontrar V tal que $g(K) \subseteq V$ y $f(\overline{V}) \subseteq U$.*

7. *a)* Sea $f_n : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$. Decida con cuáles de las topologías del ejercicio anterior (f_n) tiene límite.

   b) Sea $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$. Pruebe que la (f_n) converge con la topología de convergencia compacta (y concluya que la función límite es continua), pero que no converge con la topología uniforme.

8. Pruebe que el conjunto de las funciones acotadas $\mathscr{B} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ acotada}\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología de convergencia compacta pero sí lo es con la topología uniforme.